Janusz Lipiec

Piotr Janas

Zakład Fizyki, Uniwersytet Rolniczy

do użytku wewnętrznego

ĆWICZENIE 6

WŁAŚCIWOŚCI SPRĘŻYSTE CIAŁ STAŁYCH

6A WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI
6B POMIAR MODUŁU YOUNGA

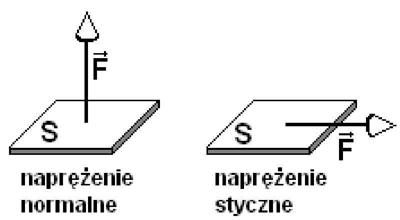
Kraków 2016

ZAKRES WYMAGANYCH WIADOMOŚCI ZE SZKOŁY ŚREDNIEJ:

Dynamika bryły sztywnej. II zasada dynamiki dla bryły sztywnej. Definicja momentu bezwładności. Twierdzenie Steinera. Ruch harmoniczny. Własności sprężyste ciał stałych: odkształcenie sprężyste i niesprężyste, prawo Hooke’a, moduł Younga.

Własności sprężyste ciał stałych, rodzaje odkształceń.

Odkształcenie ciała stałego wywołane działaniem sił zewnętrznych zaburza równowagę międzyatomową, powodując pojawienie się sił reakcji zwanych siłami sprężystymi. Stałość odkształcenia jest efektem równowagi pomiędzy siłami i momentami sił zewnętrznych i sprężystych. Odkształcenie, które zanika po usunięciu sił zewnętrznych (ciało powraca do początkowego kształtu) nazywane jest sprężystym, jeżeli skutki działania sił są trwałe odkształcenie nazywane jest plastycznym. W ilościowym opisie oddziaływań sprężystych zamiast sił wykorzystuje się wielkości zwane naprężeniami σ, definiowane jako stosunek działającej siły F do wielkości powierzchni S, na którą działa: $\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{S}$. Jednostką naprężenia jest paskal Pa = N/m^2. W zależności od kierunku działania siły w stosunku do powierzchni rozróżnia się naprężenia normalne (prostopadłe do S) i styczne (równoległe do S). Działanie dowolnie skierowanej siły można przedstawić jako sumę naprężenia stycznego i normalnego. Składową normalną naprężenia nazywa się też ciśnieniem lub ciągnieniem i oznacza literami p lub σ. Składową styczną naprężenia nazywa się naprężeniem ścinającym i oznacza literą τ.



Rys.1. Naprężenie normalne i styczne.

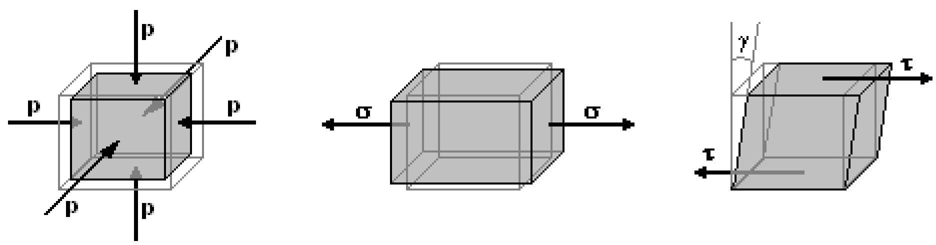
Miarą wielkości odkształcenia ciała stałego jest bezwymiarowe odkształcenie względne ε, wyrażane stosunkiem zmiany określonego rozmiaru ciała Δx (niekoniecznie rozumianego jako wymiar liniowy) do jego wielkości początkowej x: $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$. Odkształcenia mogą wiązać się ze zmianą objętości ciała (objętościowe) lub kształtu ciała (postaciowe). W większości przypadków obserwuje się występowanie efektów zarówno objętościowych jak i postaciowych.

Dla małych odkształceń sprężystych ich związek z naprężeniami określa **prawo Hooke'a**, w myśl którego naprężenie jest wprost proporcjonalne do odkształcenia:

$$\sigma \sim \varepsilon. \qquad (1)$$

Współczynnik proporcjonalności i precyzyjne określenie odkształcenia ε zależy od rodzaju naprężenia wywołującego odkształcenie. Dla naprężeń normalnych podstawowe odkształcenia to ściskanie (sprężanie) i jednoosiowe rozciąganie, dla naprężeń stycznych - ścinanie proste.

a) b) c)



Rys.2. Podstawowe typy odkształceń: a) ściskanie (sprężanie) , b) rozciąganie jednoosiowe, c) ścinanie proste.

1. Ściskanie ciała wywołane izotropowym ciśnieniem p powoduje zmianę objętości ciała bez zmiany jego kształtu (rys.2a). Miarą odkształcenia jest stosunek zmiany objętości ΔV ciała do jego objętości pierwotnej V, $\beta = \Delta V/V$. Między działającym ciśnieniem p, a β zachodzi związek:

$$p = K \cdot \beta. \qquad (2)$$

Współczynnik proporcjonalności K (o wymiarze ciśnienia) nazywany jest **modułem ściśliwości**.

2. Jednoosiowe rozciąganie wywołuje para naprężeń σ normalnych działających wzdłuż jednej prostej (np. rozciąganie drutu). Miarą odkształcenia jest stosunek zmiany długości ciała Δl do jego długości pierwotnej l: $\varepsilon = \Delta l/l$. Między naprężeniem σ, a ε zachodzi związek:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \qquad (3)$$

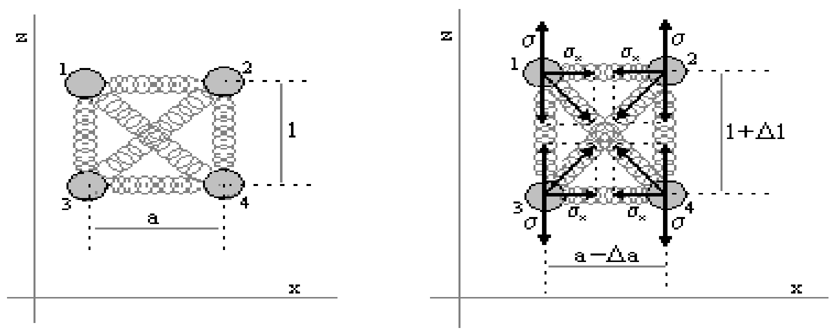
Współczynnik proporcjonalności E (mający wartość naprężenia odpowiadającego podwojeniu długości rozciąganego ciała) nazywa się **modułem Younga**.

3. Ścinanie proste wywołane przez parę naprężeń stycznych τ powoduje zmianę kształtu ciała, bez zmiany objętości. Miarą odkształcenia jest kąt deformacji γ. Między naprężeniem ścinającym τ i kątem γ zachodzi związek:

$$\tau = G\, \gamma. \qquad (4)$$

Współczynnik proporcjonalności G (o wymiarze naprężenia) nazywa się **modułem sztywności**.

W rzeczywistym ciele stałym żadne z trzech omówionych, podstawowych odkształceń nie może powstać niezależnie. Zewnętrzne naprężenie styczne lub normalne skierowane w określonym kierunku zawsze skutkuje powstawaniem w ciele stałym naprężeń o innych kierunkach. Ilustrację tego efektu przedstawia rysunek 3, na którym widnieje dwuwymiarowy model elementarnej komórki ciała poddanego jednoosiowemu rozciąganiu pod wpływem zewnętrznego naprężenia normalnego σ, skierowanego wzdłuż osi z. Naprężenie σ powoduje wydłużenie komórki wzdłuż osi z o Δl, ale równocześnie naprężenia σ_{x}, będące poziomymi składowymi naprężeń działających wzdłuż przekątnej (pomiędzy atomami 1-4 i 2-3), powodują skrócenie podstawy komórki o Δa. Podobnemu skróceniu o Δb ulega również komórka wzdłuż trzeciej osi y (niewidocznej na rysunku). Odkształcenia, jakim ulega komórka elementarna przenoszą się na makroskopowe ciało, w rozciąganym pręcie o długości l i przekroju prostokątnym o bokach a i b, wydłużeniu pręta o Δl , towarzyszy zmniejszenie przekroju o Δa i Δb.



Rys.3. Dwuwymiarowy model elementarnej komórki ciała stałego poddanej jednoosiowemu rozciąganiu wzdłuż osi z.

Ustalono doświadczalnie, że względne skrócenie boków podstawy jest proporcjonalne do względnego wydłużenia ciała: $\Delta a/a = \Delta b/b = \mu\ \Delta l/l$,

gdzie μ - bezwymiarowa stała materiałowa zwana **współczynnikiem Poissona**.

Wartość współczynnika Poissona pozwala określić zmiany objętości materiału poddanemu deformacji. Ponieważ dla omawianego pręta jego początkowa objętość $V = abl$, względne zmiany wymiarów podczas odkształcenia można (przeprowadzając różniczkowanie podobne jak w metodzie logarytmicznej) przedstawić w postaci:

$$\Delta V/V = -\Delta a/a - \Delta b/b + \Delta l/l = \Delta l/l\ (1-2\mu).$$

Ponieważ dla większości materiałów wartość μ zawarta jest w granicach od 0.2 do 0.4, to

$\Delta V/V > 0$, co oznacza, że objętość materiału poddanego deformacji sprężystej wzrasta (jedynie dla μ=0.5 V= const). Współzależność procesów rozciągania i sprężania materiału powoduje, że stałe sprężyste charakteryzujące te deformacje (moduł Younga E i moduł ściśliwości K) muszą być od siebie zależne. Można udowodnić, że E, K i μ wiąże zależność:

$$E = 3K(1-2\mu). \qquad (5')$$

Podobnie prowadzona analiza ścinania prostego, podczas którego oprócz naprężeń stycznych w ciele stałym powstają dodatkowe naprężenia normalne (rozciągające), pozwala ustalić związek modułu sztywności G ze stałymi E i μ:

$$E = 2G(1+\mu). \qquad (5'')$$

Powyższe zależności powodują, że z czterech stałych E ,G, K i μ jedynie dwie są liniowo niezależne i do pełnej charakterystyki sprężystych właściwości badanego materiału wystarcza znajomość wartości dwu z nich np. modułu Younga i modułu sztywności.

Właściwości mechaniczne ciał stałych (20^{o}C).

Nazwa materiału	Moduł Younga $*10^{10}$ Pa	Moduł sztywności $*10^{10}$ Pa	Współczynnik Poissona
Cyna	3.9-5.4	1.8	0.33
Cynk	3.4-13	2.6-4.6	0.2-0.3
Duraluminium	6.9-7.4	2.6-2.7	0.34
Drewno	0.9-1.3	1-1.6	-
Glin	6.2-7.3	2.2-2.7	0.34
Miedź	7.9-13	4.0-4.8	0.35
Mosiądz (30% Zn)	10.3	4.2	0.35
Nikiel	20	7.8	0.3
Ołów	1.4-1.7	0.64	0.45
Platyna	16.7	6.1	0.39
Szkło	4.9-7.9	1.7-3.0	0.2-0.3
Stal	21.5	8.15	0.29
Wolfram	35.4	13.2	0.17

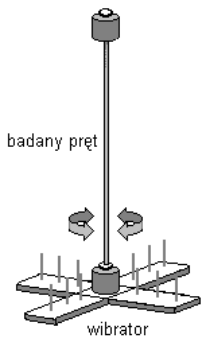
Literatura

1. Szuba S., Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Poznań 1987
2. Dryński T., Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN. Warszawa 1976
3. Kajtoch Cz., Laboratorium fizyczne, Kraków 1991
4. Szydłowski H., Pracownia fizyczna, PWN. Warszawa 1995

6A WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI

I. Idea metody pomiarowej

Bezpośredni pomiar modułu sztywności materiału poddanego ścinaniu prostemu jest trudny do wykonania. Natomiast stosunkowo prosto można go wyznaczyć metodą dynamiczną wywołując ścinanie w pręcie skręcanym parą momentów sił. Ponieważ moment skręcający musi być , zgodnie z prawem Hooke'a, proporcjonalny do wielkości skręcenia (odkształcenia pręta) w pręcie można wzbudzić drgania harmoniczne.



Rys. 4. Wahadło skrętne (torsyjne).

Jeśli na końcu umocowanego pionowo drutu o długości L zawiesić wibrator o momencie bezwładności I (dwa skrzyżowane płaskowniki umożliwiające mocowanie dodatkowych obciążeń) , to obrócenie go o kąt α spowoduje że o ten sam kąt skręci się drut. Skręcenie drutu wywołuje wystąpienie w drucie momentu sił sprężystości $M = - D\,\alpha$, który po oswobodzeniu wibratora wprawia go w ruch drgający o okresie $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$. Znając okres drgań i moment bezwładności wibratora można znaleźć moment kierujący D, a stąd w oparciu o formułę $D = 0{,}5\pi R^4\, G/L$ (patrz uzupełnienie) moduł sztywności G materiału z którego wykonano drut.

W praktyce by wyeliminować trudny do wyznaczenia moment bezwładności I wibratora dokonuje się dwu pomiarów, mierząc najpierw okres T_o drgań wahadła z wibratorem, a następnie okres T_w dla wahadła o momencie bezwładności powiększonym o znaną wartość I_w. Wartość modułu sztywności G można wówczas wyznaczyć z zależności:

$$G = \frac{8\pi I_w L}{R^4 (T_w^2 - T_0^2)}\,. \tag{6}$$

II. Cel ćwiczenia

Wyznaczenie modułu sztywności badanego materiału.

III. Wykonanie ćwiczenia

1. Zmierzyć przymiarem metrowym długość drutu L(bez końcówek mocujących):
   L = …. [m].
2. W dziesięciu miejscach zmierzyć śrubą mikrometryczną średnicę drutu, zapisując wyniki wszystkich pomiarów $D_1....D_{10}$ [mm].
3. Zmierzony drut przykręcić w uchwycie statywu umocowanego na ścianie, do końca drutu przykręcić wibrator.
4. Skręcić wibrator o niewielki kąt (do 30°) i zmierzyć stoperem czas trwania N okresów jego drgań (co najmniej 10). Zapisać zmierzony czas t_o i wyliczyć okres tych drgań $T_0 = t_o/N$.
5. Obciążyć wibrator symetrycznie czterema mosiężnymi walcami, zapisując ich odległość b od osi wibratora. Masy m i promienie walców a wynoszą odpowiednio: m = 277,50g, Δm = ± 0,05 g, a = 22.95mm, Δa = ±0.025 mm. Odległości b bolców od osi wynoszą kolejno: 40mm, 80mm, 120mm, Δb=±1mm.
6. Skręcić obciążony wibrator o niewielki kąt i mierzyć czas N okresów jego drgań. Zapisać zmierzony czas t_w, wyliczyć okres drgań obciążonego wibratora $T_w = t_w/N$.

IV. Opracowanie wyników

Uwaga: Za zgodą prowadzącego zajęcia pełne opracowanie ćwiczenia (obliczenia i szacunek niepewności) można przeprowadzić wykorzystując program Ćwicz.6A dostępny na komputerze w laboratorium studenckim.

1. Wyliczyć dodatkowy moment bezwładności I_w wibratora po obciążeniu walcami. Moment bezwładności walca o masie m i promieniu a względem jego osi symetrii wynosi $0{,}5ma^2$. Moment bezwładności tego walca względem osi równoległej przesuniętej o b (twierdzenie Steinera) wynosi $0{,}5\,ma^2 + mb^2$. W przypadku 4 walców otrzymuje się:

$$I_w = 4m(0{,}5a^2 + b^2).$$

2. Obliczyć średnią wartość średnicy D, a następnie wartość promienia $R=D/2$.
3. Wyliczyć moduł sztywności G z równania: $G = \dfrac{8\pi I_w L}{R^4(T_w^2 - T_0^2)}$

V. Szacunek niepewności pomiarowej.

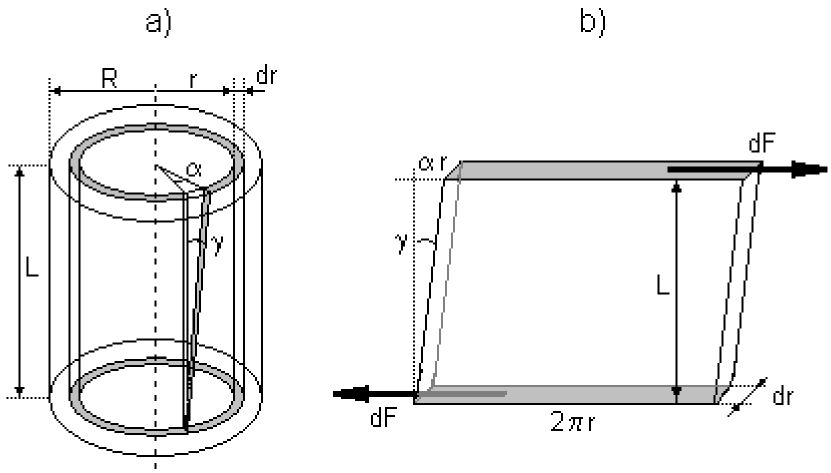
1. Obliczyć niepewność standardową wartości momentu bezwładności I_w będącego funkcją trzech zmiennych *m, a, b* zgodnie ze wzorem (9)*. Niepewności standardowe *u(m), u(a)* i *u(b)* obliczyć wykorzystując podane uprzednio niepewności maksymalne Δm, Δa i Δb: $u(x) = \Delta x / \sqrt{3}$.
2. Niepewności maksymalne (eksperymentalne) pomiaru długości *L* i średnicy *D* pręta określić na podstawie dokładności stosowanych przyrządów pomiarowych: $\Delta L=$ [m], $\Delta D =$ [m], a następnie obliczyć niepewności standardowe $u(L) = \Delta L / \sqrt{3}$ *i* $u_B(D) = \Delta D / \sqrt{3}$.
3. Obliczyć niepewność standardową pomiaru promienia $u(R) = \sqrt{u_A(\overline{D})^2 + u_B(D)^2} \,/\, 2$, gdzie $u_A(\overline{D})$ (odchylenie standardowe dla średniej $\overline{D}$) określa wzór (3)*.
4. Obliczyć niepewność standardową pomiaru okresu drgań *T* wibratora $u(T) = \Delta t / (N\sqrt{3})$ zakładając, że maksymalna niepewność eksperymentatora w ręcznym pomiarze czasu *t* wynosi $\Delta t = 1s$.
5. Obliczyć niepewność standardową pomiaru modułu sztywności *G* jako funkcji pięciu zmiennych L, R, I_w, T_w *i* T_o zgodnie ze wzorem (9)*.

Wzory ( )* Patrz „ Wprowadzenie do metod opracowywania wyników pomiarów”.

VI. Uzupełnienie

Wyprowadzenie formuły na wyznaczanie modułu sztywności

Wahadło skrętne (torsyjne) to ciało sztywne (wibrator) o momencie bezwładności *I* zawieszone na nieważkim pręcie o module sztywności *G*, promieniu *R* i długości *L*. Dla wyprowadzenia formuł opisujących drgania takiego układu rozważmy najpierw skręcenie rury o promieniu *r*, grubości *dr* i długości *L*, pod wpływem momentu sił $dM = dF\, r$. Jest ono równoważne odkształceniu ścinania prostopadłościanu o wymiarach podstawy $2\pi r$ i dr oraz wysokości *L*. Po podstawieniu do związku $\tau = G\gamma$ za $\tau = dF/(2\pi r\, dr)$ oraz za $\gamma = r\alpha/L$ otrzymujemy $dF = 2\pi r^2 G\alpha\, dr/L$. A na moment sił skręcających rurę wyrażenie $dM = 2\pi r^3 G\alpha\, dr/L$. Skręcanie pręta o promieniu *R* i długości *L* możemy traktować jak równoczesne skręcanie wielu rur o promieniach rosnących od 0 do *R*. Sumaryczny moment sił związanych z odkształcaniem pręta jest wtedy sumą , wyliczonych, wyżej momentów działających na kolejne rury. Wykonując odpowiednie całkowanie otrzymujemy: $M = 0{,}5\pi R^4\, G\alpha/L$.



Rys.4. a) Skręcenie pręta złożonego z układu elementarnych rurek o promieniu *r*, wysokości *L* i grubości *dr*. b) Skręcenie rurki jako efekt ścinania prostego prostokątnej warstwy o długości *2πr*, wysokości *L* i grubości *dr*, pod wpływem pary sił stycznych *dF*.

Wielkość $D=0{,}5\pi R^4 G/L$ nazywa się momentem kierującym. Skręcenie drutu na którym wisi wibrator o kąt α powoduje wystąpienie w drucie momentu sił $M = -D\alpha$, który wprawia wibrator w ruch drgający (znak – oznacza, że zwrot *M* jest przeciwny do zwrotu kąta α). Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego $M = I\,\varepsilon$ otrzymujemy równanie ruchu wahadła: $I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + D\alpha = 0$, gdzie $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2$ jest przyspieszeniem kątowym. Rozwiązaniem tego równania jest zależność kąta skręcenia od czasu typu $\alpha(t) = \alpha_0 \cos\sqrt{\frac{D}{I_0}}\,t$. Oznacza to, że okres drgań wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$. Jeśli zmierzymy okresy drgań wibratora nieobciążonego $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$, oraz tegoż wibratora obciążonego dodaniem masy o momencie bezwładności I_w, $T_w = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_w}{D}}$, to można otrzymać na *D* wyrażenie: $D = \frac{4\pi^2 I_w}{T_w^2 - T_0^2}$.

Porównując ten wzór z otrzymanym wcześniej $D = 0{,}5\pi R^4\, G/L$ dostajemy:

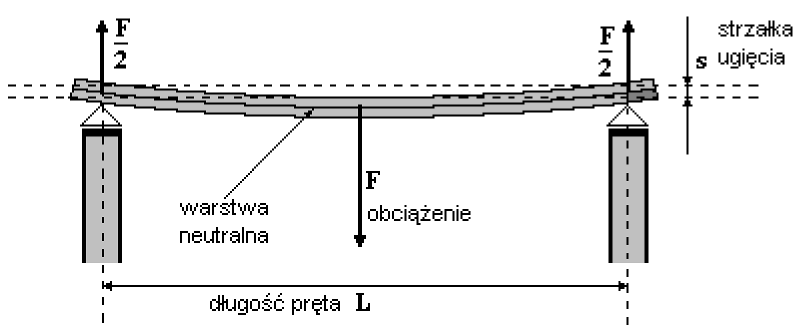
$$G = \frac{8\pi I_w L}{R^4 (T_w^2 - T_0^2)}.$$

6B POMIAR MODUŁU YOUNGA

Pomiar modułu Younga metodą ugięcia pręta.

I. Wstęp

Moduł Younga *E* jest jednym z trzech podstawowych parametrów charakteryzujących sprężyste właściwości ciał stałych. Zgodnie z prawem Hooke'a *E* jest współczynnikiem proporcjonalności pomiędzy naprężeniem normalnym, a względnym wydłużeniem ciała. Chociaż prawo to charakteryzuje najprostszy typ od kształcenia, jednoosiowe rozciąganie, ustalenie wartości *E* bezpośrednio z prawa Hooke'a, na drodze pomiaru wydłużenia rozciąganego określoną siłą pręta, wcale nie jest proste w warunkach laboratoryjnych. Mierzalne mikrometrycznie wydłużenia dla niewielkich osiągalnych obciążeń uzyskuje się dla prętów (drutów) o odpowiednio dużej długości i niewielkich przekrojach poprzecznych (średnicach). Dla wielu materiałów (np. szkła, drewna) przygotowanie próbek o wymaganych parametrach jest utrudnione ze względów technologicznych, dla materiałów łatwych w obróbce (np. metale) próbki wykazują tendencję do deformacji poprzecznych (zagięć) utrudniających pomiar i interpretację wyników pomiarowych. Istnieje jednak metoda eliminująca te niedogodności. Polega ona na pomiarze ugięcia poziomego pręta z badanego materiału podpartego w dwóch punktach końcowych, pod wpływem pionowej siły *F* działającej na środek pręta:



Rys.5. Ugięcie pręta podpartego na końcach.

Miarą powstałej deformacji jest tzw. strzałka ugięcia *s*, równa przesunięciu położenia środka wygiętego pręta. Podczas uginania pręta, jego dolne warstwy wydłużają się, a górne skracają. Warstwa środkowa, zwana neutralną, nie zmienia długości, ulegając jedynie wykrzywieniu. Ponieważ zarówno rozciąganie, jak ściskanie pręta wywołują naprężenia normalne do przekroju poprzecznego pręta, wartość strzałki ugięcia, zgodnie z prawem Hooke'a, jest proporcjonalna do siły deformującej F:

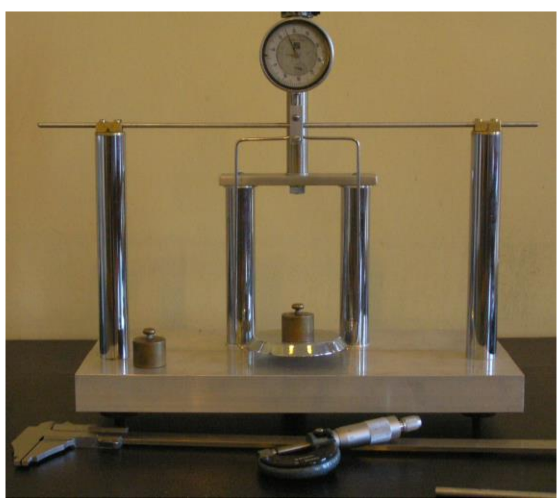
$$s \sim F. \tag{7}$$

W zależności od kształtu przekroju poprzecznego pręta i jego wymiarów geometrycznych współczynnik proporcjonalności ma różną postać. Dla okrągłego pręta o promieniu R i długości części uginanej L, obliczona teoretycznie zależność $s(F)$ ma postać:

$$s = \frac{FL^3}{12\pi R^4 E}. \tag{8}$$

II. Zasada pomiaru.

Wartość strzałki ugięcia s przeprowadza się przy pomocy mikrometru tarczowego połączonego z szalką zawieszoną na badanym pręcie, na której umieszcza się odważniki obciążenia o znanej masie m. Obciążenie jest równe ciężarowi odważników $F = mg$ (g - przyspieszenie ziemskie). Ponieważ pojedynczy pomiar strzałki ugięcia może być obarczony dużym błędem przypadkowym, przeprowadza się całą serię pomiarów ugięcia dla różnych obciążeń i na jej podstawie oblicza najbardziej prawdopodobną wartość stosunku F/s.



Rys.6. Widok stanowiska pomiarowego.

III. Cel ćwiczenia:

Wyznaczenie modułu Younga pręta przez pomiar strzałki ugięcia.

IV. Wykonanie ćwiczenia:

1. Wyznaczyć przy pomocy linijki długość L części pręta ulegającej deformacji podczas obciążenia (odległość pomiędzy wierzchołkami pryzmatów podpierających pręt- patrz Rys.1).
2. Zmierzyć śrubą mikrometryczną średnicę wybranego pręta. Pomiar powtórzyć pięciokrotnie w różnych miejscach pręta. Obliczyć wartość średnią średnicy D.
3. Umieścić badany pręt symetrycznie na pryzmatycznych podporach wsuwając go z boku poprzez strzemiączko szalki.
4. Obracając tarczą mikrometru do pomiaru strzałki ugięcia ustawić wskazanie zerowe na skali pomiarowej.
5. Przy pomocy odważników umieszczanych na szalce wyznaczyć maksymalne obciążenie pręta, dla którego strzałka ugięcia s mierzona mikrometrem tarczowym wyniesie około 0,7- 1mm . (1działka skali mikrometru jest równa 0,01mm).
6. Wyniki pomiaru wpisać do tabeli: masę m wyrazić w gramach, strzałkę ugięcia s (wskazanie mikrometru) w mm.
7. Powtórzyć pomiar strzałki ugięcia dla kilku (wystarczy 5 do 8), w miarę równomiernie malejących, obciążeń szalki.
8. Wyniki pomiarów zapisać w tabeli, uzupełniając brakujące kolumny (przyjąć g = 9.81 m/s^2):

Lp.	Masa obciążenia m (g)	Masa obciążenia m (kg)	Ciężar obciążenia $F = mg$ (N)	Strzałka ugięcia s (mm)	Strzałka ugięcia s (m)

V. Opracowanie wyników.

Uwaga: Za zgodą prowadzącego zajęcia pełne opracowanie ćwiczenia (obliczenia i szacunek niepewności) można przeprowadzić wykorzystując program Ćwicz.6B dostępny na komputerze w laboratorium studenckim.

1. Przedstawić na wykresie związek pomiędzy ciężarem obciążenia F i wartością strzałki ugięcia s (wykres F od s).
2. Wykreślić optymalną linię prostą i wyznaczyć wartość współczynnika kierunkowego $\alpha = \Delta F/\Delta s$ (jednostka N/m).
2. Obliczyć promień $R = D/2$ pręta. Długość pręta L i jego promień R wyrazić w metrach.
3. Obliczyć wartość modułu Younga E badanego pręta korzystając z równania:

$$E = \frac{L^3}{12\pi R^4}\alpha$$

5. Uzyskany wynik porównać z wartością tablicową.

VI. Szacunek niepewności.

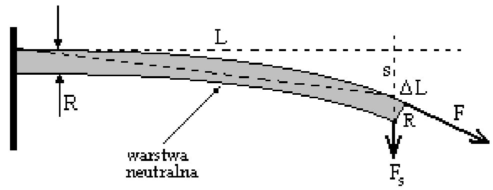
1. Niepewności maksymalne (eksperymentalne) pomiaru długości L i średnicy D pręta określić na podstawie dokładności stosowanych przyrządów pomiarowych: ΔL= ... [m], ΔD = … [m], a następnie obliczyć niepewności standardowe $u(L) = \Delta L/\sqrt{3}$ i $u_B(D) = \Delta D/\sqrt{3}$.
2. Obliczyć niepewność standardową pomiaru promienia $u(R) = \sqrt{u_A(\overline{D})^2 + u_B(D)^2}/2$, gdzie $u_A(\overline{D})$ (odchylenie standardowe dla średniej $\overline{D}$) określa wzór (3)*.
3. Obliczyć niepewność standardową *u(α)* współczynnika *α = F/s* wykorzystując wzór (18)*.
4. Obliczyć niepewność standardową pomiaru modułu Younga *E* jako funkcji trzech zmiennych *L, R, α* zgodnie ze wzorem (9)* lub wzorem (12)*.

Wzory ( )* Patrz „ Wprowadzenie do metod opracowywania wyników pomiarów”.

VII. Uzupełnienie.

Ustalenie ścisłej zależności pomiędzy obciążeniem F_s, strzałką ugięcia *s*, a parametrami określającymi właściwości badanego materiału (modułem Younga i wymiarami geometrycznymi pręta) jest dość złożone i wymaga dobrej znajomości podstaw rachunku różniczkowego i całkowego (patrz - Literatura). Analizuje się sprężystą deformację nieskończenie małego elementu pręta, a uzyskany wynik drogą całkowania przekształca się do postaci uwzględniającej wielkości makroskopowe. Podstawową ideę takiej analizy w niezwykle uproszczony sposób można przedstawić następująco. Jednostronnie zamocowana belka o długości *L*, pod wpływem obciążenia F_s działającego na jej koniec, doznaje deformacji (ugina się), której miarę stanowi strzałka ugięcia *s* (rys.7). Na rysunku przedstawiono jedynie górną część belki (poczynając od warstwy neutralnej), która ulega rozciągnięciu o ΔL (dolna część belki ulegnie odpowiednio ściśnięciu o ΔL). Moment siły F_s uginającej belkę $M = F_s L$ jest w przybliżeniu równy momentowi siły *F* powodującej wydłużenie tego elementu belki:

$$F_s L \sim FR. \qquad (9)$$



Rys.7. Ugięcie belki umocowanej jednostronnie.

Siła F, równa co do wartości sile naprężenia sprężystego rozciągającego górne warstwy belki, wynosi, zgodnie z prawem Hooke'a:

$$F = E\,A\,\Delta L/L, \tag{10}$$

gdzie A powierzchnia przekroju poprzecznego pręta.

Dla niewielkiego kąta ugięcia belki można przyjąć, że tangens tego kąta równy s/L jest w przybliżeniu równy stosunkowi $\Delta L/R$:

$$s/L \approx \Delta L/R. \tag{11}$$

Z równań (9), (10) i (11) wynika że:

$$F_S L/RA \sim E\,Rs/L^2\,. \tag{12}$$

Zakładając, że pole przekroju porzecznego belki A jest proporcjonalna do R^2, zależność pomiędzy strzałką ugięcia s belki, a działającym obciążeniem F_s i wymiarami pręta L i R ma postać:

$$s \sim F_s\,L^3 / R^4\,E. \tag{13}$$

Dla belki podpartej dwustronnie, dla uzyskania ugięcia s wymagana jest dwukrotnie większa siła obciążająca niż dla pręta o mocowaniu jednostronnym, co oczywiście nie ma wpływu na postać przybliżenia (13).