Pochodna i różniczka funkcji oraz jej zastosowanie do obliczania niepewności pomiarowych

Krzysztof Rębilas

DEFINICJA POCHODNEJ

Pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x określona jest jako granica ilorazu różnicowego $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ przy Δx dążącym do zera, co zapisujemy jako:

$$\boxed{\frac{df}{dx} \stackrel{\textbf{def}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.} \tag{1}$$

Symbol "lim" to skrót słowa "limes", co po łacinie oznacza "granica". Symbol $\lim_{\Delta x\to 0}$ czytamy jako "granica przy Δx dążącym do zera". Najczęściej stosowane symbole dla oznaczenia pochodnej to:

$$\boxed{\frac{df}{dx} \quad \text{lub} \quad f'(x).} \tag{2}$$

Dla przykładu obliczmy pochodną funkcji $f(x)=x^2$. Na podstawie definicji (1) mamy:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)-x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.\end{aligned} \tag{3}$$

Otrzymany wynik na pochodną funkcji $f(x)=x^2$ zapisujemy w postaci:

$$(x^2)' = 2x \tag{4}$$

W podobny sposób można na podstawie definicji (1) znaleźć wzory na pochodne podstawowych funkcji matematycznych. Poniżej przedstawiamy gotowe rezultaty obliczeń dla wybranych funkcji (a oraz n oznaczają stałe):

$$(a)' = 0 \tag{5}$$

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}, \quad x>0,\ n\in\mathbb{R} \tag{6}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{7}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{8}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{9}$$

Łatwo sprawdzić, że znaleziony przez nas wynik na pochodną funkcji $f(x)=x^2$ (wzór (4)) jest szczególnym przypadkiem ogólnego wzoru (6), w którym należy podstawić $n=2$. Dla przykładu obliczmy jeszcze pochodną funkcji $f(x)=x^4$. Korzystając z wzoru (6), mamy: $(x^4)'=4x^3$.

Użyteczne są również wzory pozwalające obliczać pochodne wyrażeń złożonych będących iloczynem stałej a i funkcji f, sumą lub różnicą dwóch funkcji f i g oraz iloczynem lub ilorazem funkcji f i g:

$$(a\cdot f)' = a\cdot (f)' \tag{10}$$

$$(f\pm g)' = f' \pm g' \tag{11}$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \tag{12}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \tag{13}$$

$$[f(g)]' = f'(g)\cdot g' \tag{14}$$

Wzór (10) wykorzystujemy na przykład dla obliczenia pochodnej funkcji $f(x)=4x^3$:

$$(4x^3)' = 4(x^3)' = 4\cdot 3x^2 = 12x^2. \tag{15}$$

Wzór (11) jest użyteczny na przykład w następującym przypadku:

$$(2x^3+6x^5)' = (2x^3)' + (6x^5)' = 2\cdot 3x^2 + 6\cdot 5x^4. \tag{16}$$

Wzór (11) zastosowaliśmy identyfikując odpowiednie funkcje jako: $f = 2x^3$ oraz $g = 6x^5$. Ostatnia równość w powyższym równaniu wynika z wzorów (6) i (10).

Poniżej mamy przykład zastosowania wzoru (12):

$$(x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = \\ = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x, \qquad (17)$$

gdzie odpowiednie funkcje to: $f = x^3$ oraz $g = \sin x$.

Gdy mamy funkcję złożoną $f(g)$, stosujemy wzór (14):

$$[\sin(3x)]' = \sin'(3x) \cdot (3x)' = \cos(3x) \cdot 3,$$

gdzie $f = \sin(...)$, $g = 3x$.

Wzór (13) należy zastosować w przypadku:

$$\left(\frac{2x^4 - 7x}{3x^2 + x^3}\right)' =$$

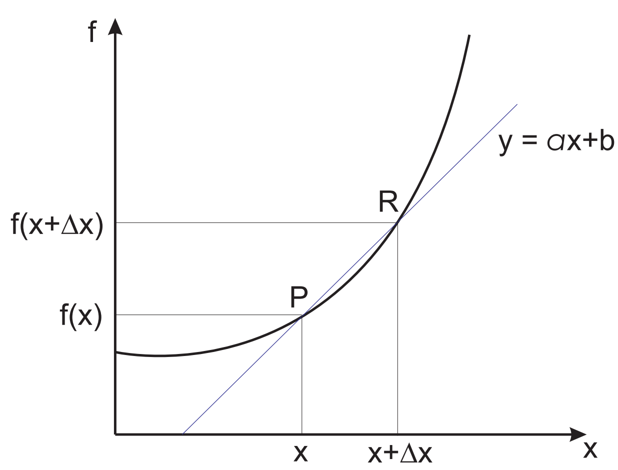
$$= \frac{(2x^4 - 7x)' \cdot (3x^2 + x^3) - (2x^4 - 7x) \cdot (3x^2 + x^3)'}{(3x^2 + x^3)^2} =$$

$$= \frac{(2 \cdot 4x^3 - 7) \cdot (3x^2 + x^3) - (2x^4 - 7x) \cdot (3 \cdot 2x + 3x^2)}{(3x^2 + x^3)^2} = ...,$$

gdzie przyjęliśmy $f = 2x^4 - 7x$ oraz $g = 3x^2 + x^3$.

GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA POCHODNEJ

W definicji pochodnej (1) występuje stosunek zmiany wartości funkcji $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ do zmiany wartości argumentu Δx. Na Rys. (1) pokazano wykres funkcji



Rysunek 1. Sieczna przechodząca przez punkty P i R w granicy $\Delta x \to 0$ staje się styczną do wykresu w punkcie x.

$f(x)$, na którym zaznaczono sieczną przecinającą funkcję w punktach $P = \big[x,\ f(x)\big]$ i $R = \big[x + \Delta x,\ f(x + \Delta x)\big]$.

Sieczna jako prosta opisana jest równaniem postaci $y = ax + b$, gdzie a to tzw. współczynnik kierunkowy prostej, którego wartość dana jest przez stosunek $a = \Delta y / \Delta x$. Na podstawie Rys. (1) widzimy, że iloraz $\Delta f / \Delta x$ to właśnie współczynnik kierunkowy siecznej przecinającej wykres funkcji w punktach P i R.

W granicy $\Delta x \to 0$ punkty P i R zlewają się i sieczna staje się *styczną* do wykresu w punkcie P. Oznacza to, że w granicy $\Delta x \to 0$ stosunek $\Delta f / \Delta x$ (czyli pochodna funkcji) staje się współczynnikiem kierunkowym stycznej. A zatem:

> Pochodna funkcji df/dx w punkcie x ma wartość współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f poprowadzonej w punkcie $P = \big[x, f(x)\big]$.

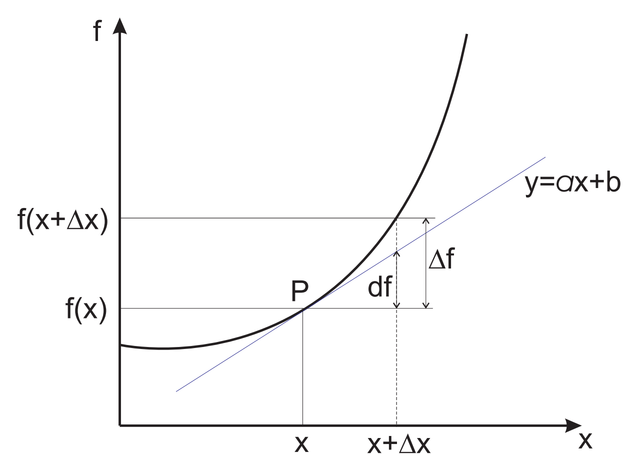
RÓŻNICZKA FUNKCJI

Różniczka funkcji df przy zmianie jej argumentu o Δx określona jest jako iloczyn pochodnej df/dx i zmiany Δx, czyli:

$$\boxed{df = \frac{df}{dx}\,\Delta x.} \qquad (18)$$

Zauważmy, że różniczka funkcji df jest równa *zmianie wartości stycznej* w punckie x następującej na odcinku od x do $x + \Delta x$ (patrz Rys. (2)). Wynika to stąd, że zmiana wartości stycznej o równaniu $y = ax + b$ wynosi $\Delta y = a\Delta x$, a współczynnik kierunkowy stycznej, jak pokazano powyżej, ma wartość pochodnej: $a = df/dx$ liczonej w miejscu x.

Na podstawie Rys. (2) można się przekonać, że dla małych wartości Δx różniczka funkcji df jest bardzo dobrym przybliżeniem zmiany wartości funkcji Δf:



Rysunek 2. Graficzne przedstawienie różniczki funkcji df.

$$\Delta f \cong df. \qquad (19)$$

A zatem, stosując powyższe przybliżenie, zmianę wartości funkcji Δf przy zmianie argumentu o Δx możemy obliczać z wzoru:

$$\Delta f \cong \frac{df}{dx}\,\Delta x. \tag{20}$$

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ

Przybliżenie (20) wykorzystujemy przy obliczaniu niepewności pomiarowych wielkości mierzonych pośrednio. Niech f będzie pewną wielkością fizyczną daną poprzez wyrażenie funkcyjne $f(x)$, gdzie x jest wielkością mierzoną bezpośrednio. Wartość wielkości f (mierzonej pośrednio) jest uzyskiwana na drodze obliczenia wartości wyrażenia $f(x)$ dla zmierzonej wartości x. Z powodu nieuniknionego błędu pomiarowego Δx, uzyskana wartość wielkości f będzie się różnić od wartości prawdziwej o pewną wartość Δf. Ponieważ błędy pomiarowe mają zwykle małe wartości, Δf można przybliżyć, stosując wyrażenie (20). Błąd pomiarowy Δx jest wielkością nieznaną, więc Δf również. Można jednak podnieść do kwadratu równanie (20) i stosując podejście statystyczne otrzymać wyrażenie na tzw. wartość oczekiwaną obu stron równania. Otrzymamy wówczas:

$$u^2(f) = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 u^2(x), \tag{21}$$

gdzie $u^2(x)$ to wartość oczekiwana $(\Delta x)^2$, a $u^2(f)$ to wartość oczekiwana $(\Delta f)^2$. Stosując pewną argumentację naukową można oszacować wartość $u^2(x)$ i na podstawie (21) znaleźć wartość oczekiwaną $u^2(f)$. Wielkości $u(x)$ oraz $u(f)$ to tzw. niepewności standardowe wyznaczenia wielkości, odpowiednio, x i f. Z wzoru (21) otrzymujemy:

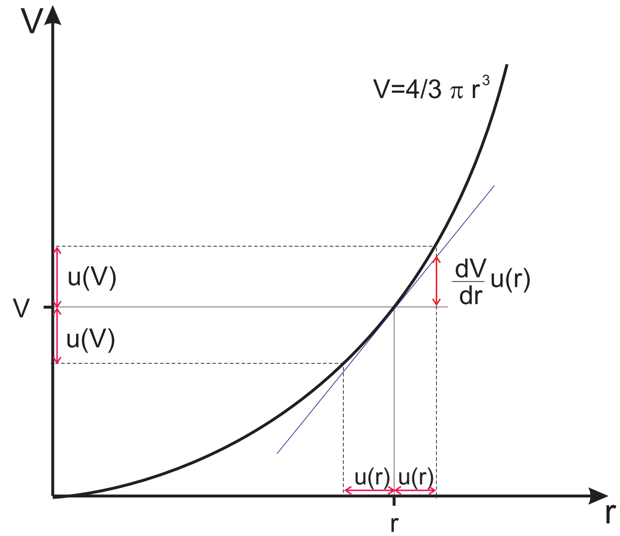
$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 u^2(x)}. \tag{22}$$

PRZYKŁAD: Chcąc wyznaczyć objętość kuli, mierzymy jej promień r i wstawiamy do wzoru:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{23}$$

Pomiar objętości kuli jest zatem pomiarem pośrednim, a wielkością mierzoną bezpośrednio jest promień r. Załóżmy, że znamy niepewność standardową pomiaru bezpośredniego, czyli znamy $u(r)$. Oznacza to, iż prawdziwa wartość promienia r mieści się z dużym prawdopodobieństwem w przedziale $\big(r - u(r),\ r + u(r)\big)$. Jak pokazuje Rys. 3, przedziałowi możliwych wartości r odpowiada pewien przedział $(V - u(V),\ V + u(V))$, w którym może się znajdować prawdziwa wartość objętości. Aby znaleźć $u(f)$ korzystamy z wzoru (22), czyli mamy:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 u^2(r)}. \tag{24}$$



Rysunek 3. Przedziałowi możliwych wartości promienia kuli $\big(r - u(r),\ r + u(r)\big)$ odpowiada pewien przedział możliwych wartości objętości $(V - u(V),\ V + u(V))$.

Tak określona wartość $u(V)$ wyznacza nam tzw. niepewność standardową pomiaru objętości.

Wykonajmy obliczenia dla przykładowych wartości liczbowych. Niech w wyniku pomiaru uzyskana wartość promienia i błąd pomiaru wynoszą:

$$r = 2,64 \text{ cm}, \quad u(r) = 0,0058 \text{ cm}. \tag{25}$$

Ze wzoru (23) otrzymujemy wtedy:

$$V = 24,53299 \text{ cm}^3. \tag{26}$$

Aby oszacować niepewność $u(V)$ najpierw znajdujemy wzór na pochodną dV/dr. W tym celu korzystamy z tabeli wyżej podanych wzorów (wzór (6)) i otrzymujemy:

$$\frac{dV}{dr} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \cdot r^2 = 4\pi r^2. \tag{27}$$

Wstawiając ten wynik do wzoru (24), mamy::

$$u(V) = \sqrt{(4\pi r^2)^2 \cdot u^2(r)}, \tag{28}$$

co po podstawieniu wartości liczbowych daje $u(V) = 0,51 \text{ cm}^3$. Ostatecznie zatem, po zaokrągleniu wyniku (26), mamy:

$$V = 24,53 \text{ cm}^3, \ \ u(V) = 0,51 \text{ cm}^3. \tag{29}$$

POCHODNA CZĄSTKOWA

Dla funkcji wielu zmiennych $f(x, y, z)$, jako uogólnienie pojęcia pochodnej, określona jest tzw. pochodna cząstkowa. *Pochodna cząstkowa po zmiennej* x (ozn. $\partial f/\partial x$)

zdefiniowana jest jako granica:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}. \qquad (30)$$

Analogicznie określona jest pochodna cząstkowa po zmiennej y i po zmiennej z:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}. \qquad (32)$$

Z definicji pochodnej cząstkowej wynika, że obliczanie pochodnej cząstkowej po jakiejś zmiennej nie różni się od obliczania zwykłej pochodnej, przy czym pozostałe zmienne należy w trakcie obliczania pochodnej traktować jako wielkości *stałe*.

Na przykład, jeśli wykonujemy pochodną po zmiennej x, wówczas y i z uznajemy za stałe, czyli funkcja $f(x, y, z)$ na czas liczenia pochodnej staje się jakby funkcją tylko *jednej* zmiennej x. Wszystkie podane wcześniej wzory (5)-(13) na pochodne funkcji jednej zmiennej mają zatem zastosowanie również przy obliczaniu pochodnych cząstkowych.

Podajmy kilka przykładów obliczania pochodnej cząstkowej.

Przykład 1:

$$f = x^2 + y^3 + z^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y^3) + \frac{\partial}{\partial x}(z^4) =$$

$$= 2x + 0 + 0 = 2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(z^4) =$$

$$= 0 + 3y^2 + 0 = 3y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^4) =$$

$$= 0 + 0 + 4z^3 = 4z^3.$$

Wykorzystaliśmy tu własność (11), że pochodna sumy jest sumą pochodnych, oraz fakt, że pochodna ze stałej wynosi zero.

Przykład 2:

$$f = \frac{x^2 + y^3}{y^4 + z^5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y^4 + z^5}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3}{y^4 + z^5}\right) =$$

$$= \frac{1}{y^4 + z^5}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 0 = \frac{2x}{y^4 + z^5},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^3) \cdot (y^4 + z^5) - (x^2 + y^3) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y^4 + z^5)}{(y^4 + z^5)^2} =$$

$$= \frac{(3y^2) \cdot (y^4 + z^5) - (x^2 + y^3) \cdot (4y^3)}{(y^4 + z^5)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^3) \cdot (y^4 + z^5) - (x^2 + y^3) \cdot \frac{\partial}{\partial z}(y^4 + z^5)}{(y^4 + z^5)^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot (y^4 + z^5) - (x^2 + y^3) \cdot (5z^4)}{(y^4 + z^5)^2} = \frac{-(x^2 + y^3) \cdot (5z^4)}{(y^4 + z^5)^2}.$$

Przy liczeniu pochodnej cząstkowej po x wyłączyliśmy "stałą" $\frac{1}{y^4+z^5}$ przed znak pochodnej, zgodnie z wzorem (10). Przy liczeniu pochodnej cząstkowej po y i z zastosowaliśmy m.in. wzór na pochodną ilorazu (13).

Przykład 3:

$$f = \frac{xy}{x + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy) \cdot (x + y) - (xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x + y)}{(x + y)^2} =$$

$$= \frac{(y) \cdot (x + y) - (xy) \cdot (1 + 0)}{(x + y)^2} = \frac{y^2}{(x + y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(xy) \cdot (x + y) - (xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x + y)}{(x + y)^2} =$$

$$= \frac{(x) \cdot (x + y) - (xy) \cdot (0 + 1)}{(x + y)^2} = \frac{x^2}{(x + y)^2}.$$

Przy liczeniu pochodnej $\frac{\partial}{\partial x}(xy)$ skorzystaliśmy z wzoru (10), a następnie (6). Dzięki temu, pamiętając że y jest traktowane teraz jak stała, mamy: $\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) = y \cdot 1 = y$. Analogicznie postąpiliśmy licząc pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial y}(xy)$, co dało nam w wyniku: $\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y) = x \cdot 1 = x$.

RÓŻNICZKA ZUPEŁNA FUNKCJI

Różniczką zupełną df funkcji $f(x,y,z)$ nazywamy wyrażenie:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z. \tag{33}$$

Jak widać jest to uogólnienie pojęcia różniczki funkcji dla funkcji wielu zmiennych.

Jeżeli zmiana argumentów funkcji Δx, Δy, Δz jest niewielka, wówczas różniczka zupełna funkcji *df* jest bardzo dobrym przybliżeniem zmiany wartości funkcji Δf wywołanej zmianą wartości jej argumentów, czyli:

$$\Delta f \cong \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z. \tag{34}$$

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ - UOGÓLNIENIE

Przybliżenie (34) wykorzystywane jest w analizie niepewności pomiarowych. Jeśli jakaś wielkość fizyczna wyraża się w formie zależności funkcyjnej $f(x,y,z)$ od mierzonych bezpośrednio i niezależnie wielkości $x,\ y,\ z$, które wyznaczone są z niepewnościami standardowymi równymi, odpowiednio, $u(x)$, $u(y)$, $u(z)$, wówczas, podnosząc do kwadratu wyrażenie (34) i obliczając wartości oczekiwane obu stron (uwzględniając, że wartości oczekiwane iloczynów $\Delta x\Delta y$, $\Delta x\Delta z$, $\Delta y\Delta z$ dają zero), otrzymujemy wzór na *niepewność standardową* pomiaru wielkości f:

$$\boxed{u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u^2(y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 u^2(z)}.}$$

Wzór powyższy jest uogólnieniem wyrażenia (22) na przypadek funkcji wielu zmiennych.

Uwaga: Jeśli zależność funkcyjna jest postaci:

$$f(x,y,z) = kx^a y^b z^c, \tag{35}$$

gdzie $a,\ b,\ c,\ k$ to stałe, wówczas po wyliczeniu pochodnych, wstawieniu do powyższego wzoru na $u(f)$ i podzieleniu obustronnym otrzymanego wyrażenia przez f otrzymamy:

$$\boxed{\frac{u(f)}{f} = \sqrt{a^2\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + b^2\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + c^2\left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}.}$$

Jest to wygodny wzór do wyliczana niepewności *względnej* $u(f)/f$ dla wielkości danych wzorem (35).

PRZYKŁAD: Używając wahadła matematycznego, można wyznaczyć przyspieszenie ziemskie g, mierząc bezpośrednio jego długość l oraz okres T i wstawiając do wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{36}$$

Załóżmy, że znamy niepewności pomiaru długości, $u(l)$, oraz okresu, $u(T)$. Niepewność wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego $u(g)$ znajdujemy, korzystając z ogólnego wzoru na $u(f)$, czyli:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u^2(l) + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u^2(T)}. \tag{37}$$

Obliczając pochodne cząstkowe, dostajemy:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 u^2(l) + \left(\frac{-8\pi^2 l}{T^3}\right)^2 u^2(T)}. \tag{38}$$

Uwaga: Ponieważ wzór (36) jest wyrażeniem postaci (35), tzn.

$$g = 4\pi^2 l^1 T^{-2}, \tag{39}$$

zatem można również skorzystać z ogólnego wzoru na $u(f)/f$ (ostatni wzór w ramce powyżej). Mamy wówczas:

$$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{(1)^2\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + (-2)^2\left(\frac{u(T)}{T}\right)^2}, \tag{40}$$

co, jak łatwo sprawdzić, jest równoważne wyrażeniu (38).