Maria Nowotny-Różańska
Zakład Fizyki, Uniwersytet Rolniczy

do użytku wewnętrznego

ĆWICZENIE 5

**Wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego
przy pomocy wahadła matematycznego i fizycznego**

Kraków, 03.2016

Spis treści:

ZAKRES WYMAGANYCH WIADOMOŚCI:

Zasady dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego (pojęcie siły, masy, momentu siły, momentu bezwładności). Prawo grawitacji, przyspieszenie ziemskie. Wahadło matematyczne i fizyczne. Ruch harmoniczny. Okres drgań wahadła matematycznego i fizycznego.

I. CZĘŚĆ TEORETYCZNA

1. Prędkość i przyśpieszenie w ruchu postępowym

Prędkość $\vec{v}$ jest to miara szybkości zmian położenia ciała. Jest to wielkość wektorowa, (tzn. posiada wartość, kierunek, zwrot). Podstawową jednostką prędkości w układzie SI jest m/s. Wyróżnia się prędkość średnią oraz prędkość chwilową. **Prędkość średnia** odpowiada dowolnemu, skończonemu przedziałowi czasu Δt i wyraża się wzorem:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} \tag{1}$$

gdzie $\Delta\vec{S}$ jest przemieszczeniem ciała w czasie Δt.

Prędkość chwilowa jest to granica (lim) prędkości średniej przy Δt dążącym do zera:

$$\vec{v}_{chwil} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{2}$$

Prędkość chwilowa jest zatem pochodną drogi po czasie.

Przyśpieszenie $\vec{a}$ jest miarą szybkości zmian prędkości ciała zachodzących w czasie. Przyśpieszenie jest również wielkością wektorową, a jego jednostką jest m/s^2. Podobnie jak w przypadku prędkości, rozróżniamy przyśpieszenie średnie oraz chwilowe.

Przyśpieszenie średnie oblicza się dla dowolnego, skończonego przedziału czasu Δt:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3}$$

gdzie $\Delta\vec{v}$ jest to przyrost prędkości ciała, który dokonał się w czasie Δt.

Przyśpieszenie chwilowe jest to granica (lim) przyśpieszenia średniego, gdy Δt dąży do zera. Jest zatem pochodną prędkości po czasie:

$$\vec{a}_{chwil} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_{chwil}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{4}$$

Korzystając z definicji prędkości chwilowej, możemy przyśpieszenie zapisać jako drugą pochodną drogi po czasie:

$$\vec{a}_{chwil} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2} \tag{5}$$

2. Zasady dynamiki Newtona dla ruchu postępowego.

Wg **I zasady dynamiki Newtona**, jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub działające siły się równoważą to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnym.

Zgodnie z **II-gą zasadą dynamiki Newtona** jeżeli siły działające na ciało nie równoważą się, to ciało porusza się ruchem zmiennym, z przyśpieszeniem wprost proporcjonalnym do wypadkowej siły i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{6}$$

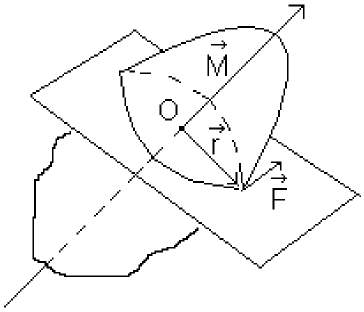
Bryła sztywna porusza się ruchem postępowym, gdy wszystkie punkty tej bryły zakreślają identyczne tory.

3. Ruch obrotowy

Bryła sztywna porusza się ruchem obrotowym wokół pewnej osi, jeśli wszystkie punkty tego ciała poruszają się po współosiowych okręgach leżących w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu. Każda zmiana w ruchu obrotowym spowodowana jest przyłożeniem do bryły sztywnej siły $\vec{F}$, dającej niezerowy moment $\vec{M}$ siły w kierunku osi obrotu. Momentem siły $\vec{M}$, nazywamy iloczyn wektorowy ramienia siły $\vec{r}$ oraz siły $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{7}$$

gdzie $\vec{M}$ jest wektorem leżącym na osi obrotu. (Rys.1).



Rys.1. Bryła sztywna z zaznaczoną przyłożoną siłą, ramieniem siły i wektorem momentu siły.

4. Prędkość i przyśpieszenie w ruchu obrotowym.

Podobnie jak dla prędkości w ruchu postępowym, rozróżnia się prędkość kątową średnią oraz prędkość kątową chwilową. **Prędkość kątowa średnia** definiowana jest dla skończonego przedziału czasu Δt:

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \tag{8}$$

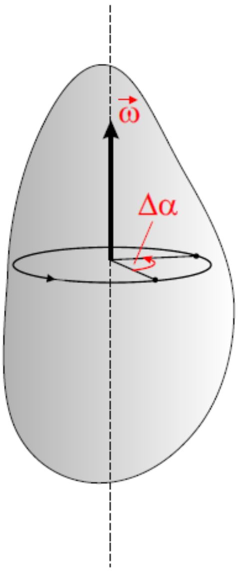
gdzie Δα jest kątem który zakreśla promień wodzący dowolnego punktu bryły sztywnej w czasieΔt. (Promień wodzący jest wektorem prostopadłym do osi obrotu o początku leżącym na osi obrotu i końcu leżącym w danym punkcie ciała.)

Prędkość kątowa chwilowa jest to granica (lim) prędkości średniej gdy Δt dąży do zera:

$$\omega_{chwil} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt} \tag{9}$$

a więc jest pochodną kąta po czasie.

Wzory (8) i (9) przedstawiają wartości prędkości kątowej średniej i chwilowej. Prędkość kątowa natomiast jest wektorem leżącym na osi obrotu.



Przyśpieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$ jest miarą szybkości zmian prędkości kątowej ciała zachodzących w czasie. Jest to wektor leżący na osi obrotu. Rozróżniamy przyśpieszenie kątowe średnie oraz przyśpieszenie kątowe chwilowe. **Przyśpieszenie kątowe średnie** jest to zmiana prędkości kątowej $\Delta\vec{\omega}$ w dowolnym, w skończonym przedziale czasu Δt:

$$\vec{\varepsilon}_{sr} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \quad . \tag{10}$$

Przyśpieszenie kątowe chwilowe jest granicą przyśpieszenia kątowego średniego, gdy Δt dąży do zera a więc pochodną prędkości kątowej po czasie:

$$\vec{\varepsilon}_{\mathrm{chwil}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad . \tag{11}$$

5. Zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego.

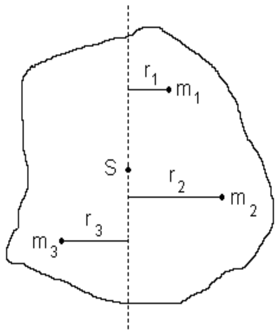
Zgodnie z **I-szą zasadą dynamiki Newtona** dla ruchu obrotowego jeśli momenty wszystkich sił działających na ciało (bryłę sztywną) równoważą się wzajemnie, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem obrotowym jednostajnym (tzn. ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$).

Natomiast wg **II-giej zasady dynamiki Newtona** jeśli na ciało działa niezrównoważony moment siły, to ciało porusza się ruchem obrotowym zmiennym z przyśpieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$, które jest wprost proporcjonalne momentu siły, a odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności I:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \tag{12}$$

Aby obliczyć **moment bezwładności I** należy podzielić bryłę sztywną na bardzo wiele (N) elementów o masach m_i (Rys.2). Każdy z nich jest odległy od osi obrotu bryły o r_i. Moment bezwładności wyrazi się wtedy wzorem:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_N r_N^2 \tag{13}$$



Rys.2. Bryła sztywna z zaznaczoną osią obrotu, elementami masy m_i oraz ich odległościami r_i od osi obrotu.

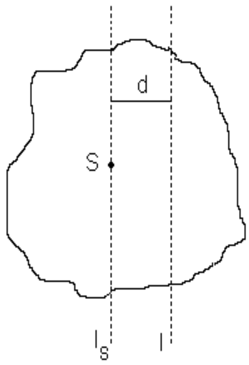
Wprowadzając znak Σ powyższą sumę możemy zapisać następująco:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \tag{14}$$

Moment bezwładności ciała zależy zarówno od kształtu bryły sztywnej jak i od położenia osi obrotu. Jeśli znamy moment bezwładności bryły I_S względem osi przechodzącej przez środek ciężkości bryły, to możemy, korzystając z twierdzenia Steinera, znaleźć moment bezwładności I względem dowolnej osi równoległej do poprzedniej. Jest on równy:

$$I = I_S + md^2 \tag{15}$$

gdzie d oznacza odległość pomiędzy osią przechodzącą przez środek ciężkości S oraz nową osią (Rys.3).



Rys.3. Ilustracja twierdzenia Steinera

6. Prawo grawitacji

Każde dwa ciała przyciągają się z **siłą grawitacji** $\vec{F}$, której wartość jest wprost proporcjonalna do iloczynu mas tych ciał m_1 i m_2, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości r pomiędzy nimi:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (16)$$

gdzie G =6. 10^{-11} Nm^2/kg^2 jest współczynnikiem proporcjonalności zwanym stałą grawitacji.
Kierunek siły $\vec{F}$ pokrywa się z linią łączącą środki mas m_1 i m_2.

Jeśli rozpatrzymy układ obejmujący Ziemię (M) oraz badane ciało (m) znajdujące się na powierzchni Ziemi, to siłę grawitacji możemy zapisać wzorem:

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \qquad (17)$$

gdzie R jest promieniem Ziemi.

7. Przyśpieszenie ziemskie

Na każde ciało znajdujące się w polu ciężkości Ziemi działa siła ciężkości $\vec{Q}$ (inaczej zwana ciężarem ciała), która nadaje ciału przyśpieszenie $\vec{g}_z$ zwane **przyśpieszeniem ziemskim:**

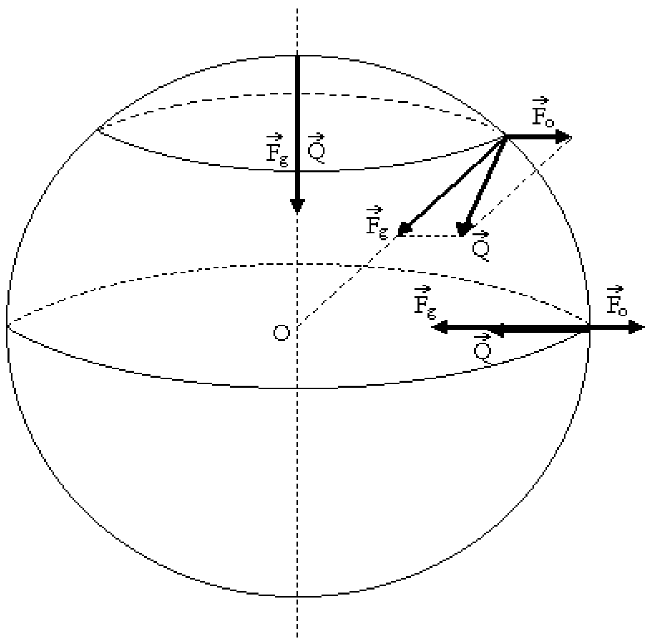
$$\vec{g}_Z = \frac{\vec{Q}}{m} \qquad (18)$$

Przyśpieszenie ziemskie jest to zatem takie przyśpieszenie, z którym poruszają się wszystkie ciała swobodnie spadające na powierzchnię Ziemi i którego wartość nie zależy od masy spadającego ciała.

Siła ciężkości (ciężar ciała) $\vec{Q}$ jest wypadkową kilku sił, wśród których dominuje siła grawitacji (wzór 17). Niewielki udział mają również inne siły np. siła odśrodkowa, siła grawitacji Słońca i siła grawitacji Księżyca.

Siła grawitacji Ziemi działająca na ciała znajdujące się na jej powierzchni zależy od szerokości geograficznej. Ziemia jest geoidą, tzn. jest spłaszczona przy biegunach. Promień biegunowy jest o 20km mniejszy od promienia równikowego. Zatem siła grawitacji jest najmniejsza na równiku i rośnie w miarę przesuwania się w stronę biegunów, gdzie przyjmuje wartość największą.

Siła odśrodkowa działająca na ciała znajdujące się na powierzchni Ziemi, jest skutkiem ruchu obrotowego Ziemi wokół własnej osi. Wartość siły odśrodkowej działającej na ciało o masie m zależy od prędkości kątowej ω (która jest stała we wszystkich punktach Ziemi) oraz odległości r danego ciała od osi obrotu Ziemi. Kierunek siły odśrodkowej jest zawsze prostopadły do osi obrotu Ziemi, zwrot skierowany w przeciwną stronę niż oś obrotu, a jej wartość rośnie w miarę przesuwania się od bieguna, gdzie wynosi zero, do równika, gdzie przyjmuje wartość maksymalną. Powoduje ona zmniejszenie ciężaru ciała.



Siła odśrodkowa jest mała w porównaniu z siłą grawitacji Ziemi. Nawet na równiku stosunek tych dwóch sił wynosi zaledwie 1:288.

Zatem ciężar ciała będący wypadkową głównie siły grawitacji Ziemi i siły odśrodkowej jest największy na biegunach, a najmniejszy na równiku.

Przyśpieszenie ziemskie - co wynika ze wzoru (18) - wykazuje podobną zależność. Przyśpieszenie ziemskie na biegunach wynosi 9.832 m/s^2, na równiku 9.780 m/s^2 , a dla Krakowa wynosi 9.81 m/s^2.

Wartość siły ciężkości związana jest również z budową wewnętrzną Ziemi, a w szczególności z budową skorupy ziemskiej. Nauka, która bada związek siły ciężkości (i przyśpieszenia ziemskiego) z figurą i budową wewnętrzną Ziemi nazywa się grawimetrią. Precyzyjny pomiar siły ciężkości w różnych punktach Ziemi dostarcza informacji o rozkładzie gęstości ośrodka w rejonie obserwacji, umożliwiając badania struktur geologicznych i poszukiwanie złóż kopalin. Podstawową wielkością mierzoną w grawimetrii jest przyśpieszenie ziemskie. Jego wartość można zmierzyć m.in. przy pomocy wahadła matematycznego, fizycznego czy bardziej skomplikowanych przyrządów zwanych grawimetrami.

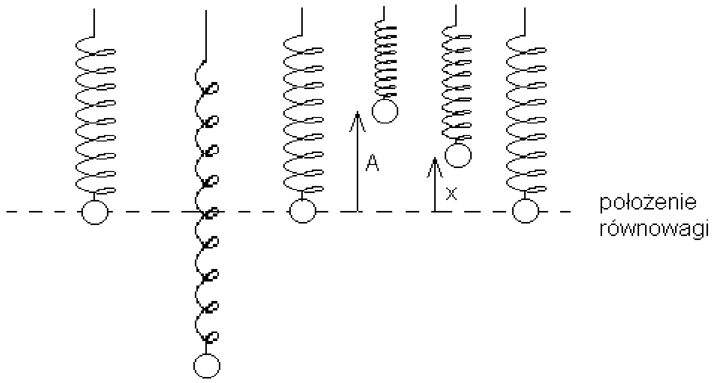
8. Ruch harmoniczny

Ruch harmoniczny jest ruchem drgającym, odbywającym się pod wpływem siły F, która w każdej chwili jest wprost proporcjonalną do wychylenia x ciała z położenia równowagi:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x} \tag{19}$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności. Poprzez wychylenie rozumiemy odległość drgającego ciała od położenia równowagi. Znak minus oznacza, że zwrot siły jest przeciwny do wychylenia.

Przykładem ciała poruszającego się ruchem harmonicznym może być ciężarek drgający na sprężynie (Rys.4). Jego drgania odbywają się pod wpływem siły sprężystości sprężyny. Siła ta zgodnie z prawem Hooke'a jest wprost proporcjonalna do wydłużenia sprężyny.



Rys.4. Ciężarek zawieszony na sprężynie w różnych fazach drgań

Korzystając z II - giej zasady dynamiki Newtona dla ruchu postępowego F=ma (6) i różniczkowej definicji przyśpieszenia (5),w której przemieszczenie S zastępuje się wychyleniem x z położenia równowagi, równanie ruchu harmonicznego (19) można przedstawić następująco:

$$-k \cdot x = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{20}$$

Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego jest funkcja okresowa w postaci:

$$x = A \cdot sin(\omega t + \phi_0) \tag{21}$$

gdzie A i ϕ_o to stałe całkowania. A jest amplitudą, tzn. maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi, zaś ϕ_o – fazą początkową. Wyrażenie $(\omega t+\phi)$ jest fazą drgania harmonicznego. Wielkość ω nazywana jest częstością drgania harmonicznego i związana jest z okresem drgań T następująco:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{22}$$

Okres drgań T jest to czas jednego pełnego drgnienia.

Częstotliwość ruchu harmonicznego f jest to liczba drgań zachodzących w jednostce czasu.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{23}$$

Korzystając ze wzorów (2), (5) i (21) i pamiętając, że przemieszczenie S zastąpione zostało przez x, można wyliczyć prędkość i przyśpieszenie w ruchu harmonicznym:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A sin(\omega t + \phi_0)\right] = A \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \phi_0) \tag{24}$$

Gdy $cos(\omega t+\phi_O)=1$, prędkość przyjmuje wartość maksymalną v_{max}:

$$v_{max} = A \cdot \omega$$

Zatem ciało posiada prędkość maksymalną gdy $sin(\omega t+\phi_O) = 0$, tzn, gdy przechodzi przez położenie równowagi.

Przyśpieszenie w ruchu harmonicznym wyraża się wzorem:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[A\,sin(\omega t + \phi_0)\right] = -A\cdot\omega^2\cdot sin(\omega t + \phi_0) = -\omega^2\cdot x \qquad (25)$$

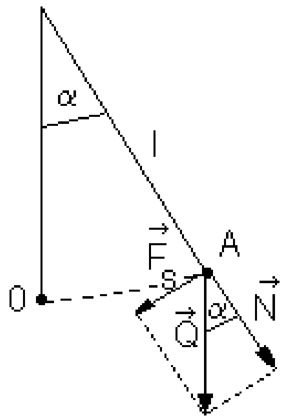
Ciało posiada maksymalne przyśpieszenie, gdy $\sin(\omega t+\varphi_0)=1$, tzn., gdy ciało znajduje się w odległości A od położenia równowagi.

Korzystając z równania ruchu harmonicznego (19), oraz ze wzoru na przyśpieszenie (25), można znaleźć związek pomiędzy współczynnikiem k i częstością ruchu harmonicznego ω.

$$k = m\cdot\omega^2 \qquad (26)$$

9. Wahadło matematyczne

Wahadłem matematycznym nazywamy wyidealizowany twór, utworzony z punktu materialnego zawieszonego na nieważkiej i nierozciągliwej nici. Gdy punkt materialny wychylimy z położenia równowagi będzie on wykonywał wahania wokół położenia równowagi O. (Rys.5).



Rys. 5. Wahadło matematyczne.

Na punkt materialny działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Gdy punkt wychylimy z położenia równowagi, siłę $\vec{Q} = m\vec{g}$ możemy rozłożyć na składową $\vec{N}$, która wywołuje naprężenie nici, oraz na składową $\vec{F}_S$ styczną do toru, która powoduje ruch wahadła. Z rys. 5 widać, że:

$$F_S = mg\,sin\,\alpha \qquad (27)$$

Dla małych kątów α możemy w przybliżeniu zapisać:

$$sin\,\alpha = \alpha \qquad (28)$$

Wyrażając kąt α w mierze łukowej $\alpha = \frac{x}{l}$, (gdzie x jest równe długości łuku OA (rys.5), wartość siły $\vec{F}_S$ możemy zapisać:

$$F_S = mg\frac{x}{l} \qquad (29)$$

Widać, że dla małych kątów α siła ta jest wprost proporcjonalna do wychylenia x z położenia równowagi, a więc jest siłą harmoniczną. Ruch punktu materialnego wokół położenia równowagi jest więc ruchem harmonicznym. Możemy zatem zapisać:

$$mg\frac{x}{l} = k \cdot x \tag{30}$$

Korzystając ze wzorów (22), (26) oraz (30) dostajemy:

$$\frac{g}{l} = \frac{4\Pi^2}{T^2} \tag{31}$$

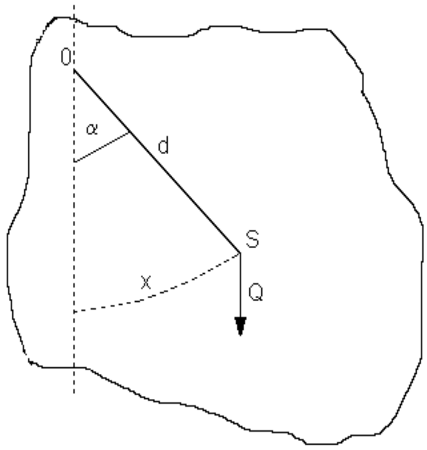
Po przekształceniu otrzymujemy wzór na okres drgań wahadła matematycznego:

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{32}$$

Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od masy ciała oraz dla małych katów wychylenia nie zależy od amplitudy drgań.

10. Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna zawieszona na poziomej osi O umieszczonej powyżej środka ciężkości bryły S (Rys.6).



Rys. 6. Bryła sztywna z zaznaczoną osią obrotu O i środkiem ciężkości S.

Przy wychyleniu wahadła z położenia równowagi o mały kąt α, działa na niego moment siły ciężkości względem osi obrotu O:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{d} \times \vec{Q}\right| = d \cdot mg \cdot \sin\alpha \tag{33}$$

gdzie d oznacza ramię siły ciężkości.

Podobnie jak dla wahadła matematycznego, zakłada się, że dla małych kątów α:

$$sin\,\alpha \cong \alpha = \frac{x}{d} \tag{34}$$

gdzie x jest to wychylenie środka ciężkości S z położenia równowagi. Zatem wartość momentu siły ciężkości wyraża się wzorem:

$$M = mgx \tag{35}$$

Ponieważ moment siły jest proporcjonalny do wychylenia x, środek ciężkości S porusza się dla małych katów α ruchem harmonicznym (analogicznie jak wahadło matematyczne), więc w dalszych rozważaniach można skorzystać ze wzoru (25). Korzystając również ze wzorów (12) i (35) oraz z zależności $\varepsilon = \frac{a}{r}$ (a w przypadku wahadła fizycznego $\varepsilon = \frac{a}{d}$) można zapisać:

$$M = I \cdot \varepsilon = I\frac{a}{d} = -\frac{I}{d}\omega^2 x = -\frac{I}{d} \cdot \frac{4\Pi^2}{T^2} \cdot x \tag{36}$$

Porównując wartości bezwzględne wzorów (35) i (36) można otrzymać:

$$mgx = \frac{4\Pi^2 Ix}{d \cdot T^2}$$

Ostatecznie wzór na okres drgań wahadła fizycznego dla małych kątów α przyjmuje postać:

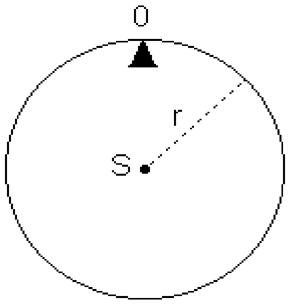
$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (37)$$

9.1. Wahadło fizyczne - obręcz

Dla obręczy moment bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez środek ciężkości S i prostopadłej do płaszczyzny obręczy (Rys.7) wynosi:

$$I_S = mr^2 \qquad (38)$$

gdzie r jest to promień obręczy, a m jej masa.



Rys.7. Wahadło fizyczne - obręcz. O - punkt, przez który przechodzi oś obrotu.

Korzystając z twierdzenia Steinera (10) można obliczyć moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt O:

$$I_0 = I_S + md^2 \qquad (39)$$

W przypadku obręczy ***d* = *r***, więc:

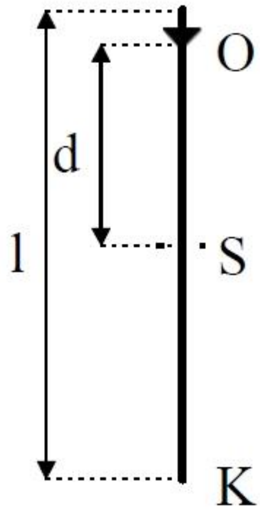
$$I_0 = mr^2 + mr^2 = 2mr^2 \qquad (40)$$

Po podstawieniu $\boldsymbol{I_O}$ do wzoru (32) :

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{2r}{g}} \qquad (41)$$

9.2. Wahadło fizyczne - pręt

Pręt zawieszamy na niewielkim pryzmacie (którego masę zaniedbujemy w obliczeniach), umieszczonym w odległości d od środka ciężkości pręta (Rys.8).



Rys.8. Wahadło fizyczne - pręt

Moment bezwładności pręta względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez środek ciężkości S wyraża się wzorem:

$$I_S = \frac{ml^2}{12} \tag{42}$$

gdzie m jest to masa pręta, a l jego długość. W oparciu o twierdzenie Steinera (10) można znaleźć moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez punkt O, a następnie korzystając ze wzoru (32), okres drgań:

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{I_S + md^2}{mgd}} \tag{43}$$

11. Zasada pomiaru.

11.1. Wyznaczanie przyśpieszenie ziemskie za pomocą wahadła matematycznego.

W tym celu należy zmierzyć długość wahadła l oraz okres drgań T i podstawić do przekształconego wzoru (27), z którego wyliczono g:

$$g = \frac{4\Pi^2 l}{T^2} \tag{44}$$

11.2. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą obręczy.

Przekształcając wzór (36) można wyliczyć przyśpieszenie ziemskie:

$$g = \frac{8\Pi^2 r}{T^2} \tag{45}$$

Wystarczy więc zmierzyć okres drgań obręczy i jej promień oraz podstawić do wzoru ().

11.3. Wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego za pomocą pręta.

Aby uzyskać wartość przyspieszenia ziemskiego należy dokonać pomiarów pręta i wyznaczyć wielkości l i d (patrz rys.8) oraz zmierzyć okres drgań pręta T. Uzyskane wartości trzeba podstawić do przekształconego wzoru (38) z którego wyliczono g:

$$g = \frac{\Pi^2\left(l^2 + 12d^2\right)}{3T^2 d} \tag{46}$$

II. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie przyśpieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła matematycznego i fizycznego.

III. WYKONANIE ĆWICZENIA

A. Pomiar przyśpieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła matematycznego.

1. Przy pomocy suwmiarki zmierzyć średnicę d kulki.
2. Zmierzyć linijką zamontowaną na ścianie długość nici wahadła i zapisać jako L.
3. Wychylić kulkę z położenia równowagi o niewielki kąt i delikatnie puścić. Jeżeli drgania kulki zachodzą w płaszczyźnie, a nić nie uderza o ograniczniki, zmierzyć stoperem czas trwania 100 okresów i zapisać jako t.
4. Pomiary opisane w punktach 1-3 powtórzyć jeszcze dla dwóch różnych długości nici.

B. Pomiar przyśpieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła fizycznego - obręczy.

1. Zdjąć obręcz ze statywu. Zmierzyć przymiarem metrowym 5 razy średnicę zewnętrzną obręczy w różnych miejscach. Następnie zmierzyć 5 razy średnicę wewnętrzną. Ze wszystkich 10-ciu pomiarów obliczyć średnią arytmetyczną i otrzymaną liczbę podzielić przez dwa.

Uzyskany wynik jest średnim promieniem r, równym odległości od środka ciężkości do osi obrotu.

2. Wychylić obręcz z położenia równowagi o niewielki kąt i zmierzyć stoperem czas trwania 100 okresów i zapisać jako t.

C. Pomiar przyśpieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła fizycznego - pręta

1. Zdjąć pręt ze statywu i zmierzyć jego długość l. (Patrz rys. 8)
2. Zmierzyć odległość od osi obrotu O (ostrza pryzmatu) do końca pręta K i obliczyć odległość od osi obrotu do środka ciężkości i zapisać jako d. (Ponieważ nie uwzględnia się masy pryzmatu, przyjmuje się, że środek ciężkości pręta S leży dokładnie w połowie jego całkowitej długości l.)

$$d = OK - \frac{l}{2} \tag{47}$$

3. Zmierzyć stoperem czas trwania 50 okresów i zapisać jako t.

IV. OPRACOWANIE WYNIKÓW

A.

1. Obliczyć długość wahadła matematycznego:

$$l = L + \frac{d}{2} \tag{48}$$

2. Znaleźć okres T jako czas pomiaru stu okresów podzielony przez 100:

$$T = \frac{t}{100} \tag{49}$$

3. Obliczyć przyśpieszenie ziemskie g ze wzoru (44).
4. Obliczyć w ten sam sposób przyśpieszenie ziemskie dla pozostałych długości wahadła. Jako błąd okresu T przyjąć *ΔT=0.01s*, ponieważ:

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{100} = \frac{1s}{100} = 0.01s \tag{50}$$

ANALIZA NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ (Tylko dla jednej, wybranej długości wahadła.)

1.Ponieważ niepewność maksymalna pomiaru średnicy kulki (**Δ_dd=0.01mm**) jest dużo mniejsza niż niepewność maksymalna pomiaru długości nici wahadła (**Δ_dL=1mm**), przyjąć, że niepewność standardowa pomiaru **l** wynosi: (wzór 4 we „Wprowadzeniu do metod opracowania wyników pomiarowych")

$$u(l) = \frac{\Delta_d l}{\sqrt{3}} = \frac{0.001m}{\sqrt{3}} = 0.00058m \tag{51}$$

2.Przy określeniu niepewności pomiarowej czasu **t**, pominąć niepewność wzorcowania, a uwzględnić jedynie niepewność eksperymentatora, wynikającą z ograniczonego refleksu osoby dokonującej pomiaru. Niepewność maksymalna eksperymentatora wynosi **Δ_et=0.5s.** Zatem niepewność standardowa pomiaru **t** wynosi: (wzór 5 we „Wprowadzeniu do…)

$$u(t) = \frac{\Delta_e t}{\sqrt{3}} = 0.29s \tag{51}$$

3.Niepewność standardową pomiaru pośredniego **T=t/100** obliczyć ze wzoru (12) we „Wprowadzeniu do …"

$$u(T) = T\sqrt{1^2 \cdot \left(\frac{u(t)}{t}\right)^2} = \frac{u(t)}{100} = \frac{0.29s}{100} = 0.0029s \tag{53}$$

4.Złożoną niepewność standardową pomiaru pośredniego **g** obliczyć ze wzoru (12) we „Wprowadzeniu do …"

*Wskazówka: Najpierw przedstawić przyśpieszenie ziemskie **g** (wzór 44 powyżej) w postaci iloczynu potęg (wzór (10) we "Wprowadzeniu do ....").*

5.Zaokrąglić uzyskaną wartość **u(g)** oraz wynik **g** wg zasad przedstawionych we "Wprowadzeniu do...".

6.Obliczyć niepewność rozszerzoną: **U(g)=k·u(g)**, gdzie **k=2**.

7.Zapisać wynik g wraz z niepewnością rozszerzoną: **g±U(g).**

8.Uzyskaną wartość g porównać z wartością tablicową: **9.81m/s^2**.

B.

1. Obliczyć przyśpieszenie ziemskie g ze wzoru (45) podstawiając do niego obliczoną wartość r i T (patrz wzór 49).

C.

1. Obliczyć okres T:

$$T = \frac{t}{50} \tag{54}$$

2. Obliczyć przyśpieszenie ziemskie g ze wzoru (46) podstawiając wartości d, l i T.

ANALIZA NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ

1. Korzystając z niepewności maksymalnych pomiarów **l** i **d**, które wynoszą:
$\Delta_d l = \Delta_d d = 0.001m$,

można obliczyć niepewności standardowe:

$$u(l) = \frac{\Delta_d l}{\sqrt{3}} = \frac{0.001}{\sqrt{3}} = 0.00058m \quad \text{oraz} \quad u(d) = \frac{\Delta_d d}{\sqrt{3}} = \frac{0.001}{\sqrt{3}} = 0.00058m\,.$$

(14)

2. Analogicznie jak w części A, przyjąć, że:

$$u(t) = \frac{\Delta_e t}{\sqrt{3}} = 0.29s \tag{55}$$

oraz obliczyć niepewność standardową pomiaru pośredniego **T=t/50**:

$$u(T) = T\sqrt{1^2 \cdot \left(\frac{u(t)}{t}\right)^2} = \frac{u(t)}{50} = \frac{0.29s}{50} = 0.0058s \tag{56}$$

3. Obliczyć złożoną niepewność standardową pomiaru g, korzystając ze wzoru (9) we "Wprowadzeniu do ...."

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u^2(l) + \left(\frac{\partial g}{\partial d}\right)^2 u^2(d) + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u^2(T)} \tag{57}$$

4.Zaokrąglić uzyskaną wartość **u(g)** oraz wynik **g** wg zasad przedstawionych we "Wprowadzeniu do...".
5.Obliczyć niepewność rozszerzoną: **U(g)=k·u(g)**, gdzie **k=2**.
6.Zapisać wynik **g** wraz z niepewnością rozszerzoną: **g±U(g).**
7.Uzyskaną wartość **g** porównać z wartością tablicową: **9.81m/s^2**.

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. Dryński Tadeusz., Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN, Warszawa 1978
2. Encyklopedia Fizyki., PWN, Warszawa 1974
3. Halliday D., Resnick R., Fizyka Tom 1, PWN, Warszawa 1974
4. Szczeniowski S., Fizyka Doświadczalna, Tom III, PWN, Warszawa 1980