

Ćwiczenie 2

POMIAR CIĘŻARU WŁAŚCIWEGO CIAŁ STAŁYCH I CIECZY PRZY POMOCY WAGI HYDROSTATYCZNEJ

KRYSTYNA GRONOSTAJ, PIOTR JANAS, MATEUSZ SUCHANEK

Uniwersytet Rolniczy im. Hugona Kołłątaja

Zakład Fizyki

6 maja 2016

Zakres wymaganych wiadomości: zasady dynamiki Newtona, prawo grawitacji, ciężar ciała, gęstość i ciężar właściwy, prawo Pascala, prawo Archimiedesa.

WSTĘP

I. Zasady dynamiki Newtona

Układ inercjalny jest to układ odniesienia, względem którego każde ciało, niepodlegające oddziaływaniu z innymi ciałami, porusza się bez przyspieszenia lub pozostaje w spoczynku. Wszystkie inercjalne układy odniesienia są równouprawnione i wszystkie prawa mechaniki i fizyki są w nich identyczne.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona: Jeżeli na ciało nie działa żadna siła albo działające siły się równoważą (siła wypadkowa jest równa zero), to ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.

$$\vec{F}_w = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{const}, \quad (1)$$

gdzie: $\vec{F}_w$ - siła wypadkowa, $\vec{v}$ - prędkość.

Druga zasada dynamiki Newtona: Jeżeli na ciało działa niezrównoważona siła $\vec{F}$, to ciało porusza się ruchem zmiennym, z przyspieszeniem $\vec{a}$ wprost proporcjonalnym do działającej siły $\vec{F}$, a odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała m .

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad \text{lub w ogólności: } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2)$$

gdzie: $\vec{p}$ - pęd ciała, ($\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{v}$ - prędkość).

Trzecia zasada dynamiki Newtona: Gdy ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{AB}$, wtedy ciało B działa

jednocześnie na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$ o tym samym kierunku, ale przeciwnie zwróconą i równą co do wartości sile $\vec{F}_{AB}$.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (3)$$

II. Ciężar właściwy i gęstość

Ciężar właściwy ciała $\vec{\gamma}$ jest to stosunek ciężaru Q ciała do jego objętości V :

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{Q}}{V} = \frac{m\vec{g}}{V}, \quad (4)$$

gdzie, m - masa ciała, $\vec{g}$ - przyspieszenie ziemskie. Jednostką ciężaru właściwego w układzie SI jest $1 \frac{N}{m^3}$.

Ciężar właściwy nie jest niezmienną cechą danego rodzaju substancji, ponieważ w różnych miejscach na Ziemi ta sama substancja ma różny ciężar właściwy. Wielkością, która charakteryzuje substancję i nie zależy od miejsca jest gęstość lub inaczej masa właściwa ciała.

Gęstość jest to masa jednostki objętości ciała i wyraża się stosunkiem masy ciała m do jego objętości V :

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (5)$$

Gęstość wyrażamy w $\frac{kg}{m^3}$.

Ciężar właściwy i gęstość są związane zależnością:

$$\vec{\gamma} = \rho \cdot \vec{g}. \quad (6)$$

Jak wiadomo, objętość ciała zależy od warunków zewnętrznych, w jakich ciało się znajduje tj. temperatury i ciśnienia. Na ogół ze wzrostem temperatury objętość wzrasta co prowadzi do zmniejszenia zarówno gęstości ciała jak i jego ciężaru właściwego. Niektóre ciecze, a zwłaszcza woda, wykazują pewne charakterystyczne anomalie. W zakresie temperatur od 0 do 4 °C objętość wody maleje, a powyżej 4 °C rośnie jak dla innych ciał.

Ze wzrostem ciśnienia objętość ciał maleje, co prowadzi do zwiększenia ich ciężaru właściwego i gęstości.

Metoda pomiaru ciężaru właściwego przyjęta w tym ćwiczeniu polega jedynie na ważeniu ciał i wykorzystaniu prawa Archimidesa. Przedstawienie tej metody wymaga podania kilku faktów dotyczących zachowania się płynów w polu grawitacyjnym. Do płynów zaliczamy ciecze i gazy. W szczególności interesować nas będzie dział mechaniki płynów zwany statyką płynów. Przedmiotem badań statyki płynów jest równowaga płynów poddanych działaniu sił.

III. Ciśnienie wewnątrz płynu w polu grawitacyjnym

Aby opisać działanie siły na płyn wprowadzamy **ciśnienie** p . Ciśnienie jest zdefiniowane jako stosunek siły F działającej prostopadle na powierzchnię S do wielkości tej powierzchni:

$$p = \frac{F}{S}. \quad (7)$$

Siłę F działającą na dowolną powierzchnię wewnątrz płynu (np. ścianki naczynia) nazywamy **parciem**. Jednostką ciśnienia jest 1 pascal (1 Pa). Jest to wartość ciśnienia wywieranego przez prostopadłą siłę 1 N na powierzchnię 1 m².

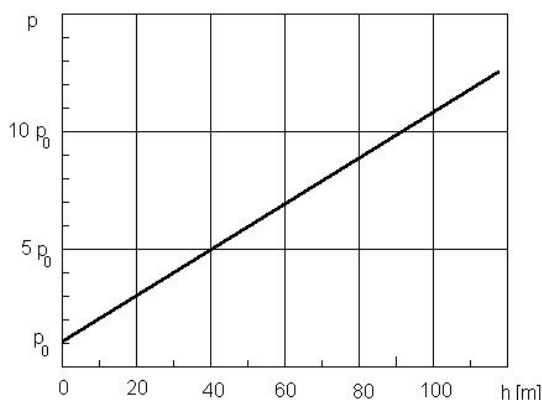
Ciśnienie wewnątrz jednorodnej cieczy (hydrostatyczne) opisuje równanie:

$$p = p_o + \rho gh = p_o + \gamma h, \quad (8)$$

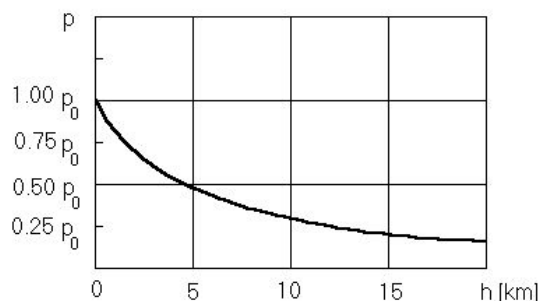
gdzie: p_o - ciśnienie na powierzchni cieczy (zewnątrzne), ρ - gęstość cieczy, g - przyspieszenie ziemskie, γ - ciężar właściwy cieczy, h - wysokość słupa cieczy (głębokość zanurzenia).

Wzór (8) pokazuje, że ciśnienie hydrostatyczne zależy jedynie od wysokości słupa cieczy (czyli, od głębokości zanurzenia) oraz ciężaru właściwego cieczy (patrz Rys. 1). Zatem, we wszystkich punktach

znajdujących się na tej samej głębokości w cieczy ciśnienie jest jednakowe. Ciśnienie wywierane przez ciecz na dno naczynia nie zależy więc od kształtu ani objętości naczynia.



Rysunek 1: Ciśnienie w wodzie na różnych głębokościach



Rysunek 2: Zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości

Ciśnienie atmosferyczne opisuje wzór barometryczny:

$$p = p_o e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (9)$$

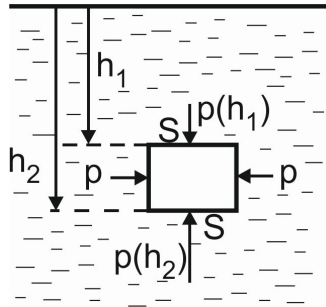
gdzie: p_o - ciśnienie atmosferyczne na poziomie odniesienia, μ - średnia masa molowa powietrza, g - przyspieszenie ziemskie, h - wysokość od poziomu odniesienia, R - stała gazowa, T - temperatura powietrza w K.

Wzór (9) pokazuje, że ciśnienie w powietrzu zmienia się w sposób eksponencjalny (Rys. 2) a nie liniowy jak w przypadku cieczy.

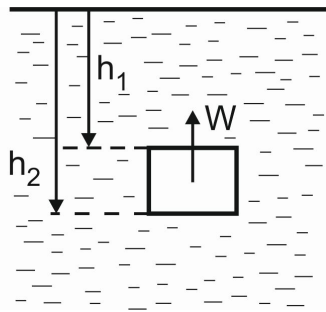
IV. Prawo Pascala i Archimidesa

Prawo Pascala: ciśnienie wywierane na zamknięty płyn jest więc przekazywane niezmienione na każdą

część płynu i na ścianki naczynia. Jeżeli ciśnienie nad powierzchnią cieczy zmienia się o Δp , wtedy ciśnienie na dowolnej głębokości h , opisane wzorem (8), zmienia się o tę samą wartość Δp . Na głębokości h wynosić będzie: $p = (p_0 + \Delta p) + \rho gh$.



Rysunek 3: Pracia P działające na ściany



Rysunek 4: Siła wyporu W

Na dowolne ciało umieszczone wewnątrz płynu działa siła wyporu W . Jest ona wypadkową sił parcia wywieranego na ciało przez płyn. Siły parcia P , zgodnie z definicją ciśnienia, są równe iloczynowi ciśnienia p i powierzchni S , na którą działają prostopadle: $P = pS$. Działanie sił parcia na elementarny, sześcienny element zanurzonego ciała przedstawia rysunek 3: Parcia działające poziomo na boczne ścianki sześcienu równoważą się. Za to, w kierunku pionowym parcia na dolną i górną ściankę (odpowiednio $P(h_2)$ i $P(h_1)$) są różne. Stąd, siła wypadkowa (siła wyporu W), dla ciśnienia hydrostatycznego opisanego równaniem (8), jest równa (Rys. 4):

$$W = P(h_2) - P(h_1) = \rho g(h_2 - h_1)S = \rho gV, \quad (10)$$

gdzie: S - powierzchnia ścianki sześcienu, V - objętość sześcienu, h_2, h_1 - poziomy zanurzenia.

¹ pomijając siłę grawitacji, która dla wirówki jest zaniedbywalna

Ponieważ ciało o dowolnym kształcie można złożyć z takich elementarnych sześciątów wartość siły wyporu nie zależy ani od kształtu ciała, ani od jego ciężaru czy głębokości zanurzenia w cieczy. Jest ona zawsze równa ciężarowi cieczy wypieranej przez ciało (iloczyn ρgV jest równy ciężarowi cieczy o gęstości ρ i objętości V). Zatem, równanie (10) opisuje **Prawo Archimedesza**: na każde ciało zanurzone częściowo lub całkowicie w cieczy działa siła wyporu W skierowana pionowo do góry i równa co do wartości ciężarowi wypartej przez to ciało cieczy ρgV .

Punkt zaczepienia siły wyporu W (dla jednorodnej cieczy) znajduje się w geometrycznym środku ciała zanurzonego (środek ciężkości hipotetycznej cieczy, która wypełniła by miejsce po przedmiocie). Kierunek siły wyznacza kierunek zmian ciśnienia hydrostatycznego, zaś jej zwrot jest przeciwny do kierunku wzrostu ciśnienia. W ogólności kierunek siły W nie zawsze musi być pionowy w stosunku do powierzchni Ziemi, a jej wartość niezależna od głębokości zanurzenia. W cieczy umieszczonej w wysokoobrotowej wirówce, ciśnienie wywołane działaniem odśrodkowej siły pozornej wzrasta w kierunku poziomym proporcjonalnie do kwadratu odległości od osi obrotu. W takich warunkach siła wyporu będzie skierowana poziomo¹, a jej wartość będzie zależna od głębokości zanurzenia (odległości od osi obrotu rotora wirówki).

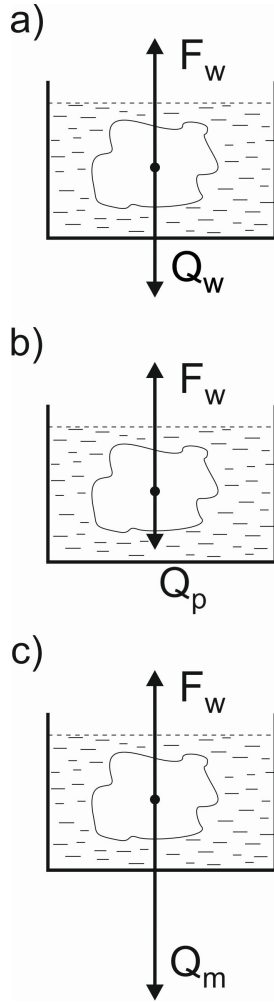
Prawo Archimedesza obowiązuje również dla gazów, ale ze względu na zależność ciśnienia i gęstości od wysokości h , siła wyporu W w gazach maleje wraz ze wzrostem wysokości nad poziomem odniesienia (Ziemi).

V. Przykłady do hydrostatyki

Warunek pływalności ciał w cieczy wynikający z prawa Archimedesza.

Rysunek 5 przedstawia trzy rodzaje ciał o różnej gęstości wypełniające taki sam ($V = const$) cienkościenny worek, który zanurzono w wodzie. W pierwszym przypadku (Rys. 5a) worek wypełniono wodą ze zbiornika ($\rho_{worka} = \rho_{H_2O}$). Siła wyporu jest równoważona przez ciężar worka i worek znajduje się w stanie równowagi obojętnej - nie tonie ani nie wypływa. W drugim przypadku (Rys. 5b) worek nadmuchano powietrzem ($\rho_{worka} < \rho_{H_2O}$). Siła wyporu jest większa od siły ciężkości. Worek wynurza

się całkowicie na powierzchnie cieczy. W trzecim przypadku (Rys. 5c) worek wypełniono metalem ($\rho_{worka} > \rho_{H_2O}$). Siła wyporu jest mniejsza od siły ciężkości. Worek tonie opadając na dno. Praktyczne zastosowanie: transport wodny i podwodny.



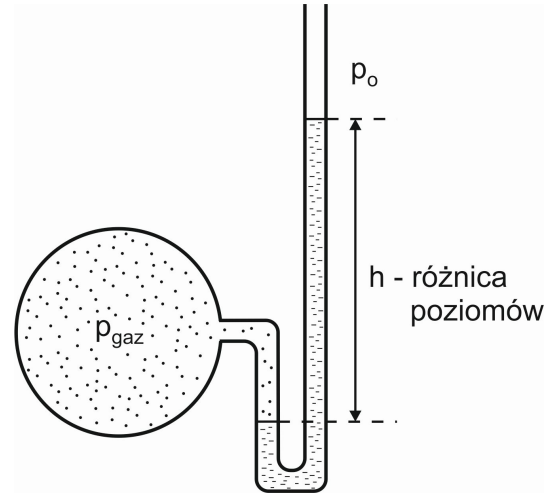
Rysunek 5: Worek cienkościenny zanurzony w wodzie oraz wypełniony kolejno: wodą a), powietrzem b), metalem c).

Manometr otwarty, przyrząd przeznaczony do pomiaru ciśnienia gazu w zbiorniku, jako przykład wykorzystania równowagi hydrostatycznej.

Rysunek (Rys. 6) ukazuje U-rurkę wypełnioną cieczą której lewe ramię połączone jest ze zbiornikiem wypełnionym gazem o ciśnieniu p_{gaz} , a prawe ramię jest otwarte do atmosfery p_o . Różnicę ciśnienia w zbiorniku i ciśnienia atmosferycznego można wyznaczyć z równowagi między ciężarem słupa cieczy o wysokości h , a parciem gazu na ciecz

od drugiej strony:

$$\rho ghS = (p_{gaz} - p_o)S \Rightarrow p_{gaz} = \rho gh + p_o. \quad (11)$$



Rysunek 6: Manometr otwarty

Prasa hydrauliczna (p. Pascala)

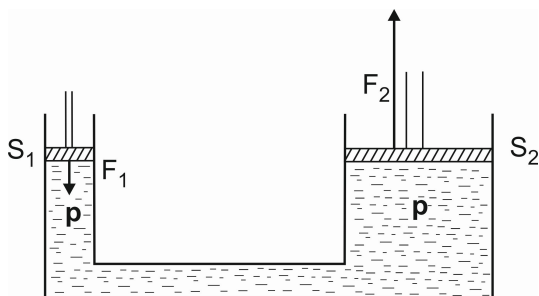
Prezentowana na rysunku 7 kolejna adaptacja U-rurki ukazuje schemat prasy hydraulicznej. Jedno z ramion U-rurki zostało powiększone wielokrotnie, następnie oba ramiona zamknięto ruchomymi ale szczelnymi tłokami. Obszar pod tłokami został całkowicie wypełniony nieściśliwą cieczą. Tłok o powierzchni S_1 , na który działa siła F_1 , wywołuje w układzie ciśnienie p :

$$p = \frac{F_1}{S_1}. \quad (12)$$

Zgodnie z prawem Pascala ciśnienie to rozprzestrzenia się po całej objętości cieczy i działa także na tłok roboczy o powierzchni S_2 wywołując siłę F_2 :

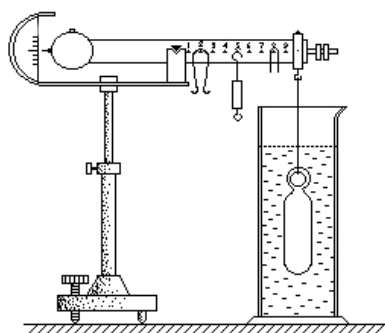
$$F_2 = pS_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1. \quad (13)$$

Z powyższego rozumowania wynika, że siła wywierana przez tłok roboczy o dużej powierzchni jest tyle razy większa ile razy powierzchnia tłoka roboczego jest większa od powierzchni tłoka pompy. Inne przykłady zastosowania prawa Pascala w praktyce: pompowanie ręczą pompką dętki/opony, samochodowe hamulce hydrauliczne, dźwigi/wózki hydrauliczne, itp.



Rysunek 7: Zasada działania prasy hydraulicznej

VI. Waga hydrostatyczna



Rysunek 8: Przykład wagi hydrostatycznej: w. Mohra

Waga hydrostatyczna to specjalny typ wagi belkowej (w. Mohra, Rys. 8) lub wagi sprężynowej (w. Jolly'ego) przeznaczonej do pomiaru siły wyporu W działającej na ciało stałe zanurzone całkowicie w cieczy. W zależności od realizacji, wynik tego pomiaru umożliwia wyznaczenie gęstości lub ciężaru właściwego zarówno ciała stałego jak i cieczy. Ponieważ siła wyporu jest równa iloczynowi ciężaru właściwego cieczy γ i objętości ciała V , to znajomość W dla ciała zanurzonego o znanej objętości V pozwala obliczyć ciężar właściwy cieczy $\gamma = W/V$. Gdy znany jest ciężar właściwy cieczy γ , pomiar W pozwala określić objętość zanurzonego ciała $V = W/\gamma$, konieczną do obliczenia jego ciężaru właściwego lub gęstości.

Pomiarową funkcję wagi hydrostatycznej może pełnić zestaw składający się z typowej cyfrowej wagi laboratoryjnej, naczynia z cieczą i statywu umożliwiającego zawieszenie ciała stałego (Rys. 9). Zestaw umożliwia pomiar ciężaru właściwego cieczy i ciał

stałych bez względu na ich względne relacje, (γ cieczy może być większy lub mniejszy od γ ciała stałego). Waga umożliwia wyznaczenie wynikającej z III zasady dynamiki siły reakcji, jakiej doznaje ciecz wypierająca zanurzone w niej ciało. Waga hydrostatyczna jest pomocna, zwłaszcza wtedy, gdy chcemy wyznaczać ciężar właściwy ciał stałych w postaci brył o niewielkiej objętości. Ciało ważone zawieszamy na druciku, którego masę możemy pominąć, jeśli jest mniejsza od czułości wagi ($\Delta m = 0.01$ g). Należy tak dobrać ciecz, aby badane ciało nie rozpuszczało się w niej i aby ciecz zwilżała powierzchnię ciała. Najczęściej używamy wody destylowanej, a jeśli nie spełnia ona powyższych warunków, wówczas możemy użyć na przykład: alkoholu, nafty lub toluenu.

VII. Wprowadzenie wzorów pomiarowych

Dla przykładu wyprowadzimy wzór na ciężar właściwy ciała o gęstości większej od gęstości wody ($\rho_c > \rho_w$). Pierwszy etap polega na ważeniu przedmiotu (Rys. 9a). Na ciało działa siła ciężkości $\vec{Q}_1$, waga wskazuje masę ciała m_1 , zatem ciężar właściwy ciała zgodnie ze wzorem (4):

$$\gamma = \frac{Q_1}{V} = \frac{m_1}{V} g. \quad (14)$$

Następnie na tej samej wadze położono zlewkę z wodą na którą działa siła ciężkości $\vec{Q}_2$ (Rys. 9b), waga wskazuje masę m_2 .

Ostatecznie, do wciąż znajdującej się na wadze zlewki z wodą zanurzono ciało swobodnie zwisające ze statywu (Rys. 9c). Wypadkowa siła ciężkości Q_3 (odpowiadająca masie m_3) jest sumą siły ciężkości $\vec{Q}_2$ (z drugiego etapu doświadczenia) i siły reakcji reakcji ciała na siłę wyporu cieczy W , stąd:

$$W = Q_3 - Q_2. \quad (15)$$

Z prawa Archimedesza (10), wiadomo, że siła wyporu:

$$W = \gamma_w V, \quad (16)$$

gdzie, γ_w - ciężar właściwy wypartej wody.

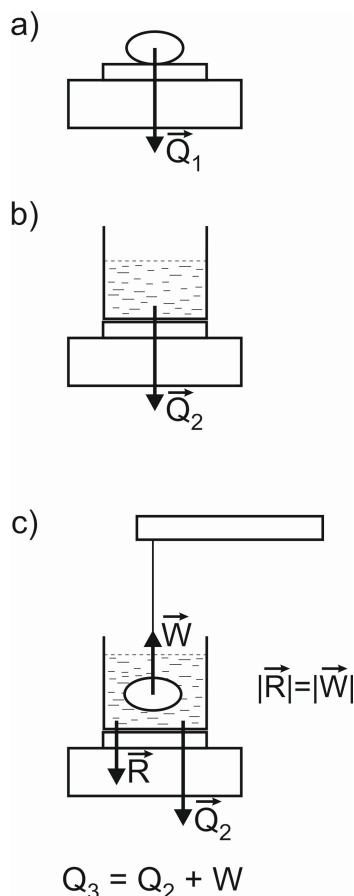
Z zależności (15) i (16) otrzymujemy wzór na objętość ciała:

$$\begin{aligned} \gamma_w V &= Q_3 - Q_2 \Rightarrow \gamma_w V = m_3 g - m_2 g \\ \Rightarrow V &= \frac{(m_3 - m_2) g}{\gamma_w}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ostatecznie ciężar właściwy ciała, podstawiając z (17) do (14) wynosi:

$$\gamma = \frac{m_1}{m_3 - m_2} \gamma_w. \quad (18)$$

W analogiczny sposób można wyprowadzić odpowiednie wzory na wyznaczanie a) ciężaru właściwego ciała stałego o gęstości mniejszej od gęstości wody, b) ciężaru właściwego nieznanej cieczy stosując ciało o znanym ciężarze.



Rysunek 9: Pomiary wagowe: a) ciało o gęstości większej od gęstości wody, b) zlewka z wodą, c) zlewka z wodą + zanurzone ciało

CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest wyznaczanie ciężaru właściwego ciał stałych i cieczy metodą polegającą jedynie na ważeniu ciał i wykorzystaniu prawa Archimedes'a.

WYKONANIE ĆWICZENIA

Ćwiczenie A. Wyznaczanie ciężaru właściwego ciała stałego o gęstości większej od gęstości wody.

1. Zważyć wybrane ciało na wadze; masa m_1 .
2. Napełnić zlewkę wodą destylowaną (ok. 90ml) i zmierzyć jej temperaturę; t .
3. Zważyć zlewkę z wodą; masa m_2 .
4. Zawiesić ciało na ramieniu statywu i opuszczając ramię zanurzyć ciało całkowicie w wodzie.
5. Zanotować nowe wskazanie wagi; masa m_3 .

Ćwiczenie B. Wyznaczanie ciężaru właściwego ciała stałego o gęstości mniejszej od gęstości wody.

1. Zważyć wybrane ciało (korek, drewno) na wadze; masa m_1 .
2. Zważyć ponownie zlewkę z wodą; masa m_2 .
3. Do otworu w badanym ciele wbić igłę i zamocować ją w ramieniu statywu dokręcając śrubą.
4. Opuścić ramię tak, aby ciało całkowicie zanurzyć w wodzie; masa m_3 .

Ćwiczenie C. Wyznaczanie ciężaru właściwego cieczy (roztwór NaCl).

1. Sporządzić wodny roztwór NaCl o stężeniu 10g/100ml.
2. Zlewkę z roztworem (ok. 90ml) umieścić na wadze; masa m_4 .
3. Zawiesić ponownie badane ciało o masie m_1 (z ćwiczenia A) na ramieniu statywu i zanurzyć go całkowicie w badanym roztworze; masa m_5 .

OPRACOWANIE ĆWICZENIA

ad Ćw. A. Obliczyć ciężar właściwy ciała o gęstości większej od gęstości wody według wzoru:

$$\gamma = \gamma_w \frac{m_1}{m_3 - m_2} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right], \quad (19)$$

gdzie γ_w - ciężar właściwy wody o temperaturze t (Tab. 1).

Tabela 1: Ciężar właściwy wody destylowanej w funkcji temperatury

t ($^{\circ}\text{C}$)	γ_w (N/m^3)
10	9804
15	9798
20	9789
25	9778
30	9763

Dokładniejszą wartość ciężaru właściwego wody w dowolnej temperaturze t można obliczyć stosując metodę interpolacji liniowej. W metodzie tej zmiany ciężaru właściwego pomiędzy punktami węzłowymi przybliża się funkcją liniową.

Przykład: Wyznaczyć ciężar właściwy wody w temperaturze $t = 17.6^{\circ}\text{C}$. Najbliższe dwa punkty węzłowe mają współrzędne:

$$t_1 = 15^{\circ}\text{C}, \gamma_1 = 9798 \text{ N}/\text{m}^3,$$

$$t_2 = 20^{\circ}\text{C}, \gamma_2 = 9789 \text{ N}/\text{m}^3.$$

Równanie prostej przechodzącej przez te punkty ma postać:

$$\gamma(t) = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t}(t - 15^{\circ}\text{C}) + \gamma_1,$$

$$\text{gdzie, } \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{t_2 - t_1} = -1.8 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3 \cdot ^{\circ}\text{C}} \right].$$

$$\text{Zatem, } \gamma(17.6^{\circ}\text{C}) = -1.8 * (17.6 - 15) + 9798 = 9793.32 \text{ N}/\text{m}^3 \approx 9793 \text{ N}/\text{m}^3.$$

ad Ćw. B. Obliczyć ciężar właściwy ciała o gęstości mniejszej od gęstości wody według wzoru (19).

ad Ćw. c. Obliczyć ciężar właściwy cieczy według wzoru (20):

$$\gamma = \gamma_w \frac{m_5 - m_4}{m_3 - m_2} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right], \quad (20)$$

(wykorzystać wartości m_3 i m_2 z ćwiczenia A).

Uwagi:

1. Przed przystąpieniem do ważenia należy sprawdzić, czy waga jest wypoziomowana i wyzerowana.
2. Ważenie jest przeprowadzone poprawnie, gdy ciało lub zlewka znajduje się na środku szalki.

VIII. Dyskusja błędu pomiarowego

Dyskusja niepewności pomiarowej dla części A:

Niepewność standardowa oszacowana dla wagi RAD WAG WTB 2000 wynosi: $u(m_i) = 0,035\text{g}$. (gdzie i oznacza indeks dolny przy masie, czyli 1, 2 lub 3)

Upraszczamy wzór (19) poprzez wprowadzenie nowej zmiennej $M = m_3 - m_2$, otrzymujemy:

$$\gamma = \gamma_w \cdot m_1^1 \cdot M^{-1}.$$

Niepewność standardowa $u(M)$ nowej zmiennej M wynosi:

$$u(M) = \sqrt{[u(m_3)]^2 + [u(m_2)]^2} = 0,050\text{g}.$$

Ostatecznie obliczyć niepewność standardową ciężaru właściwego ciała ze wzoru na niepewność standardową funkcji iloczynowej:

$$u(\gamma) = \gamma \cdot \sqrt{\left[\frac{u(m_1)}{m_1} \right]^2 + \left[\frac{u(M)}{M} \right]^2}. \quad (21)$$

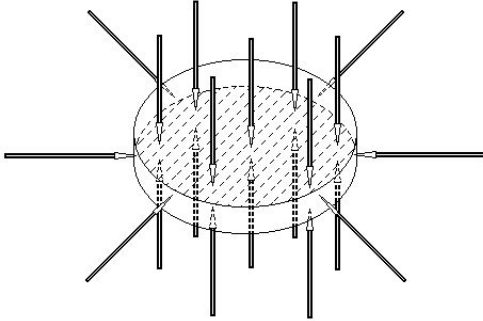
Analogicznie przeprowadzić dyskusję niepewności pomiarowej dla części C.

IX. Literatura

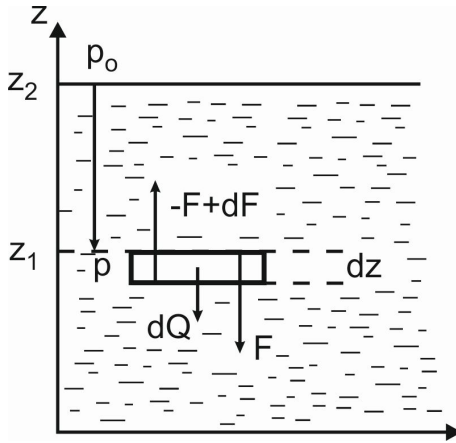
1. T. Dryński - Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki
2. D. Holliday, R. Resnick - Fizyka, tom I
3. J. Orear - Fizyka, tom I
4. Sz. Szczeniowski - Fizyka doświadczalna, cz.1
5. Encyklopedia Fizyki, tom I
6. Wikipedia

Dodatek

Wyprowadzenie wzorów (8, 9) na ciśnienie wewnątrz płynów



Rysunek 10: Siły działające na element objętości płynu



Rysunek 11: Siły działające w kierunku pionowym na wybrany element objętości

Rozważmy pewien płyn o ciężarze właściwym γ znajdujący się w równowadze. W równowadze jest więc każdy element objętości tego płynu. Wybierzmy element o kształcie dysku o powierzchni S i grubości dz , wówczas jego ciężar wynosi:

$$dQ = \gamma S dz. \quad (22)$$

Siły wywierane na wybrany element przez otaczający płyn są w każdym punkcie prostopadłe do jego powierzchni, jak na Rysunku 10. Siły działające na boczną ściankę wybranego elementu objętości są

skierowane poziomo, natomiast na ściankę dolną i górną - pionowo. Warunkiem równowagi elementu objętości jest równoważenie się sił działających zarówno w kierunku poziomym jak i pionowym. W kierunku poziomym działają jedynie siły wywierane przez otaczający płyn. Ze względu na symetrię siły te równoważą się na każdej wysokości z . Za to w kierunku pionowym działają następujące siły (Rys. 11):

$\vec{F}$ - siła wywierana przez otaczający płyn na górną powierzchnię elementu cieczy,

$\vec{F} + d\vec{F} \Rightarrow F_w = -F + dF$ - siła wypadkowa wywierana przez otaczający płyn na dolną powierzchnię elementu cieczy,

$d\vec{Q}$ - ciężar rozpatrywanego elementu cieczy.

Aby siły działające w kierunku pionowym równoważyły się, ich wypadkowa dF musi być różna od zera i skierowana przeciwnie do ciężaru rozpatrywanego elementu objętości $d\vec{Q}$. W wybranym układzie współrzędnych warunek równowagi przyjmuje postać:

$$F + (-F + dF) + dQ = 0 \Rightarrow dF = -dQ. \quad (23)$$

Podstawiając ze wzoru (22), dostajemy:

$$dF = -\gamma S dz \Leftrightarrow \frac{dF}{S} = -\gamma dz, \quad (24)$$

stąd:

$$dp = -\rho g dz. \quad (25)$$

Aby wykonać całkowanie wzoru (25), należy znać gęstość ρ jako funkcję wysokości z , oraz należy uwzględnić zależność przyspieszenia ziemskiego g od wysokości.

1. W przypadku cieczy gęstość jest praktycznie stała, gdyż ciecze są prawie nieściśliwe. Zmiany wysokości są na tyle małe, że można zaniebawić zmiany przyspieszenia ziemskiego wraz z wysokością/głębokością. Przyjmując w równaniu (25) ρ i g za stałe otrzymujemy dla jednorodnych cieczy: $p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$. Przyjmując, że z_2 jest poziomem powierzchni cieczy, ciśnienie p_2 będzie równe ciśnieniu atmosferycznemu p_o , a $(z_2 - z_1)$ będzie równe głębokości h zanurzenia ciała uzyskujemy:

$$p = p_o + \rho gh.$$

-
2. Dla gazów gęstość ρ jest mała w porównaniu z gęstością cieczy, a więc i zmiana gęstości wraz z wysokością, spowodowana ściśliwością gazów, jest również niewielka. Aby obliczyć ciśnienie powietrza na wysokości h nad poziomem morza przyjmujemy następujące upraszczające założenia: a) przyspieszenie ziemskie g jest stałe, b) temperatura powietrza jest stała, c) powietrze traktujemy jak gaz doskonały. Gaz doskonały opisuje równanie Clapeyrona:

$$pV = \frac{M}{\mu}RT, \quad (26)$$

gdzie p - ciśnienie, V - objętość, M - masa gazu, μ - masa molowa gazu, R - stała gazowa, T - temp. bezwzględna. Stąd i ze wzoru na

gęstość $\rho = \frac{M}{V}$, otrzymujemy:

$$\rho(z) = \frac{\mu p(z)}{RT} \quad (27)$$

Uwzględniając powyższe założenia wzór (25) przekształcamy $\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z)g$, otrzymując:

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}p(z). \quad (28)$$

Przyjmując, że h jest odległością mierzoną od poziomu Ziemi, rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego (28) jest wzór barometryczny (9):

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$