



Ćwiczenie 23

A. Wyznaczanie współczynnika lepkości dynamicznej cieczy niutonowskiej metodą Poiseuille’a

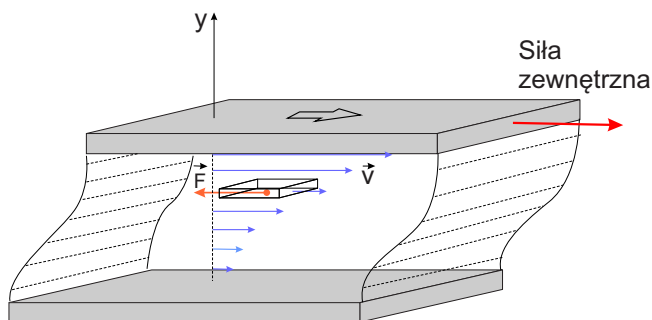
B. Wyznaczanie współczynnika lepkości dynamicznej cieczy niutonowskiej metodą Arrheniusa

C. Pomiar współczynnika lepkości za pomocą wiskozymetru rotacyjnego

Krzysztof Rębilas

ZJAWISKO LEPKOŚCI

Lepkość cieczy to *tarcie wewnętrzne* pojawiające się w cieczy podczas jej przepływu. Gdy ciecz jest w ruchu, sąsiadujące ze sobą warstwy cieczy poruszają się z różną prędkością i dlatego oddziałują na siebie siłami tarcia wewnętrznego (siłami lepkości). Rozważmy na przykład ciecz znajdującą się między dwoma równoległymi płytkami - Rys 1. Dolna płytka jest nieruchoma, a górna po-

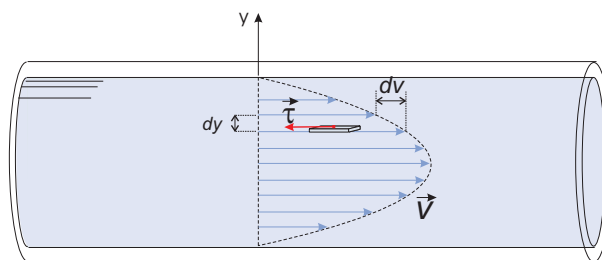


Rysunek 1. Ruch cieczy umieszczonej między dwoma płytkami. Z powodu różnych prędkości panujących w cieczy, warstwy wolniejsze działają hamująco siłami tarcia (lepkości) \vec{F} na warstwy szybsze.

rusza się z pewną prędkością v powodując ruch znajdującą się pod nią cieczy. Warstwy cieczy znajdujące się tuż przy każdej z płytek mają taką prędkość jak płytka, tzn. warstewka cieczy przy dolnej płytce się nie porusza, a przy górnej płytce ma prędkość v . W obszarze pośrednim między płytkami możemy wyróżnić warstewki cieczy mające różne prędkości zmieniające się w zakresie od zera do v . Między sąsiadującymi warstwami cieczy występują siły lepkości \vec{F} . W szczególności siły lepkości występują między warstwą cieczy przylegającą do górnej płytki i nieco wolniejszą warstwą cieczy bezpośrednio poniżej. Z tego względu, aby utrzymać górną płytkę w ruchu, należy przyłożyć do niej siłę zewnętrzną, która zrównoważy siłę lepkości hamującą ruch płytki.

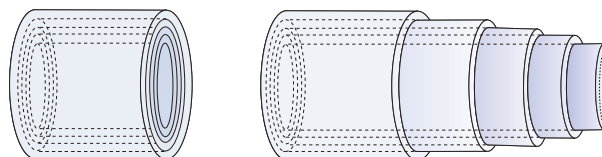
Innym przykładem może być ruch cieczy w cienkiej

rurze (kapilarze) - Rys. 2. W tym przypadku ciecz tuż



Rysunek 2. Ruch cieczy w kapilarze. Na rysunku zaznaczono tzw. naprężenie styczne $\vec{\tau}$ zdefiniowane jako siła lepkości \vec{F} przypadająca na jednostkową powierzchnię – por. wzór (1). Prędkość warstw cieczy odległych od siebie o dy zmienia się o wartość dv .

przy ściankach kapilary ma zerową prędkość, zaś przy osi kapilary porusza się z największą prędkością. W obszarze pośrednim mamy warstwy cieczy, które można sobie wyobrazić jako cienkościennie cylindryczne rury, posiadających różne prędkości - Rys. 3. Ślizgając się po sobie,



Rysunek 3. Cienkościennie cylindryczne warstwy cieczy płynącej w kapilarze mają różne prędkości.

oddziałują one na siebie siłami tarcia wewnętrznego, czyli lepkości.

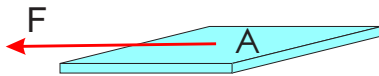
Z punktu widzenia teorii cząsteczkowej lepkość tłumaczy się wymianą pędu między przyległymi warstwami płynącej cieczy. Wymiana ta zachodzi w skutek przemieszczania się cząsteczek z jednej warstwy do drugiej. Cząsteczki opuszczające warstwę poruszającą się wolniej powodują zmniejszanie pędu warstwy szybszej, do której przechodzą. Analogicznie, cząsteczki z warstwy szybszej powodują wzrost pędu warstwy wolniejszej.

Podczas przepływu płynu lepkiego występuje przekształcenie części jego energii kinetycznej w energię kinetyczną bezładnego ruchu cząsteczek. Oznacza to, że następuje ogrzewanie się płynu. Jest to zjawisko dyssypacji, czyli rozpraszania koherentnej energii kinetycznej płynu jako całości.

PRAWO NEWTONA

Do opisu zjawisk lepkości wygodnie jest wprowadzić następujące wielkości. Pierwszą z nich jest tzw. naprężenie styczne:

Naprężenie styczne τ to stosunek siły F działającej stycznie do powierzchni do wartości tejże powierzchni A (Rys. 4), czyli:



Rysunek 4. Siła F styczna do powierzchni wywołuje naprężenie styczne $\tau = F/A$, gdzie A to wlekość powierzchni.

$$\tau = \frac{F}{A}. \quad (1)$$

Innymi słowy, naprężenie styczne to siła styczna do powierzchni działająca na *jednostkową* powierzchnię.

Siły lepkości działają przeciwnie do prędkości płynu, czyli *stycznie* do wyróżnionych w cieczy warstw o różnych prędkościach. Mówimy zatem, że wewnątrz cieczy będącej w ruchu panuje naprężenie styczne (por. Rys. 2).

Inną ważną wielkością fizyczną jest tzw. **gradient prędkości** lub inaczej **szybkość ścinania**. Jeśli prędkości sąsiednich warstw odległych od siebie o odległość dy (mierzoną w kierunku prostopadłym do ich prędkości) różnią się od siebie o dv (Rys. 2), to mówimy, że w danym miejscu istnieje gradient prędkości $\dot{\gamma}$ równy stosunkowi dv/dy :

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dy}. \quad (2)$$

W granicy nieskończenie małych wielkości dv i dy , stosunek dv/dy oznacza pochodną funkcji $v(y)$.

Dla wielu cieczy, zwanych **cieczami niutonowskimi**, obowiązuje tzw. **prawo Newtona**:

Naprężenie styczne τ w danym miejscu cieczy jest wprost proporcjonalne do szybkości ścinania $\dot{\gamma}$ w tymże miejscu:

$$\tau = \eta \dot{\gamma}. \quad (3)$$

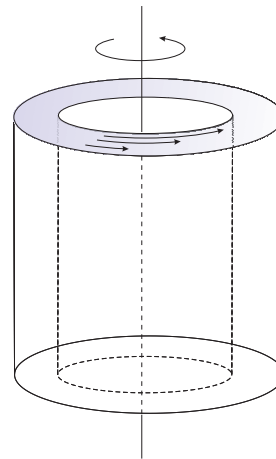
Pojawiający się w prawie Newtona współczynnik proporcjonalności η (czytaj: eta) nosi nazwę **współczynnika lepkości dynamicznej** lub **lepkości dynamicznej**.

Jednostką współczynnika lepkości jest $(\text{N}/\text{m}^2)\cdot\text{s}$ albo $\text{Pa}\cdot\text{s}$ (czytaj: paskalosekunda).

Współczynnik lepkości η zależy przede wszystkim od rodzaju cieczy i dostarcza pewnej informacji o oddziaływaniach międzycząsteczkowych. Jeżeli bowiem dwie ciecze będą płynąć w ten sam sposób, tzn. obie będą mieć *ten sam* gradient prędkości, to mimo tego siły tarcia wewnętrzne (naprężenie styczne) będą zazwyczaj *różne*. Oznacza to, że przy tych samych warunkach płynięcia siła wzajemnego tarcia między warstwami jest różna dla różnych cieczy. Powodem tego jest przede wszystkim to, że cząsteczki różnych cieczy mają różne masy oraz inne rozmiary i inny kształt.

Współczynnik lepkości zależy również od ciśnienia i w dużym stopniu od temperatury. Zależność od temperatury zmienia się wraz z kształtem cząsteczek bądź też zmianą konformacji, a więc jest funkcją rozmiarów i kształtów cząsteczek cieczy. Wiadomo z doświadczeń, że jeżeli temperatura wzrasta, współczynnik lepkości dynamicznej cieczy η maleje i tak jest dla większości cieczy. Ale znane są ciecze, których lepkość dla pewnych temperatur osiąga minimum lub maksimum. Jest to związane z łączeniem się cząsteczek w kompleksy bądź też rozpadaaniem się kompleksów w odpowiedniej temperaturze. Dla wielu cieczy, głównie niutonowskich, słuszną jest następująca zależność współczynnika lepkości od temperatury: $\eta = Ae^{W/kT}$, gdzie k - stała Boltzmanna, e - podstawa logarytmu naturalnego, A , W - stałe wyznaczone w sposób indywidualny dla każdej cieczy.

Do pomiaru współczynnika lepkości służą przyrządy zwane **wiskozymetrami**. W wiskozymetrze *rotacyjnym* ciecz umieszczona jest między dwoma cylindrami, z których jeden (np. wewnętrzny) jest w ruchu - Rys. 5. Mie-



Rysunek 5. Wiskozymetr rotacyjny.

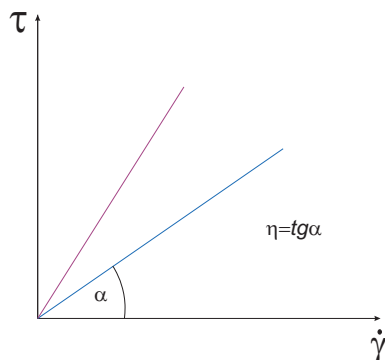
ząc naprężenie styczne (poprzez pomiar momentu siły przyłożonego do wirującego walca) i prędkość kątową obracającego się walca (co pozwala obliczyć gradient prędkości), można wyznaczyć współczynnik lepkości.

W wiskozymetrach *kapilarnych* ciecz przetłaczana

jest przez rurkę. Zasada pomiaru opiera się na prawie Hagera-Poiseuille'a (patrz dalej).

KRZYWA PŁYNIĘCIA

Krzywą płynięcia nazywamy wykres zależności naprężenia stycznego τ od szybkości ścinania $\dot{\gamma}$. Krzywą płynięcia cieczy niutonowskich przedstawiono na Rys. 6. Jest to linia prosta, nachylona do osi szybkości ścinania



Rysunek 6. Krzywa płynięcia dla dwóch cieczy niutonowskich.

pod kątem zależnym od rodzaju cieczy. Na podstawie prawa Newtona (3) stwierdzamy, że tangens kąta nachylenia wykresu do osi szybkości ścinania jest równy współczynnikowi lepkości dynamicznej η . Do płynów niutonowskich należą ciecze, w których lepkie rozpraszanie energii zachodzi wskutek zderzeń względnie małych cząsteczek. Tu należy zaliczyć gazy i ciecze proste oraz roztwory związków o małym ciężarze cząsteczkowym. Koloidy, roztwory polimerów, biopolimerów o dużych cząsteczkach wykazują na krzywej płynięcia wyraźne *odstępstwa* od prostoliniowego wykresu dla cieczy niutonowskich. Ciecze takie nazywamy *nieniutonowskimi*. Krzywe płynięcia dla różnego rodzaju cieczy nieniutonowskich przedstawiono na Rys. 7.

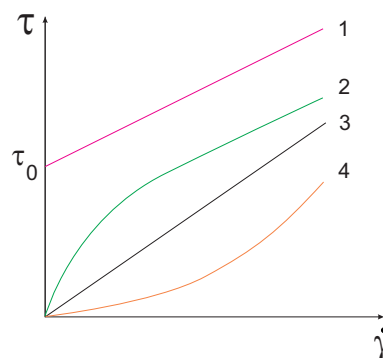
RODZAJE PRZEPIŁYWÓW

O przepływie mówimy, że jest **laminarny** gdy tory cząsteczek cieczy układają się równolegle do siebie. Z kolei, przepływ nazywamy burzliwym lub **turbulentnym**, gdy tory cząsteczek przestają być równoległe do siebie i tworzą lokalne kształty wirów.

Aby bliżej określić obserwowany charakter ruchu cieczy niutonowskiej posługujemy się liczbą Reynoldsa. Dla cieczy płynącej przez kapilarę określona jest ona jako:

$$Re = \frac{Dv\rho}{\eta}, \quad (4)$$

gdzie D - średnica kapilary przez którą płynie ciecz, v - prędkość płynięcia, ρ - gęstość płynu, η - lepkość dynamiczna płynu. Jeżeli liczba Re jest mniejsza od wartości



Rysunek 7. Krzywe płynięcia dla różnych cieczy nieniutonowskich na tle krzywej płynięcia cieczy niutonowskiej: 1 - ciecz binghamowska, 2 - ciecz pseudoplastyczna, 3 - ciecz niutonowska, 4 - ciecz wykazująca dilatancję. τ_0 - granica płynięcia cieczy binghamowskiej (plastycznej).

krytycznej $Re_{kryt} = 2100$, ruch jest laminarny. Powyżej Re_{kryt} ruch przechodzi w burzliwy. Liczba Reynoldsa jest liczbą niemianowaną. Zauważmy, że ciecze o dużej lepkości η zwykle (tj. dla niedużych prędkości) będą podlegały przepływowi laminarnym, podczas gdy dla cieczy o niewielkiej lepkości, już przy małych prędkościach może dojść do przepływu turbulentnego.

PRAWO HAGERA-POISEUILLE'A

Jednym z ważniejszych przepływów jest przepływ cieczy przez kapilarę. Z taką sytuacją fizyczną spotykamy się w praktyce mierniczej (wiskozymetry kapilarne) oraz przy okazji przepływu krwi w naczyniach krwionośnych. Prawo Hagera-Poiseuille'a określa, dla przepływu cieczy przez kapilarę, od czego zależy tzw. **objętościowe natężenie wypływu** Q [m^3/s]. Q zdefiniowane jako stosunek objętości cieczy V wypływającej z kapilary do czasu t , w którym ta objętość cieczy wypłynęła, czyli

$$Q = \frac{V}{t}. \quad (5)$$

Prawo Hagera-Poiseuille'a głosi, iż

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \eta L}, \quad (6)$$

gdzie Δp to różnica ciśnień na końcach kapilary, a R i L to odpowiednio promień i długość kapilary. Jest ono podstawą do wyznaczania współczynnika lepkości η metodą wypływu cieczy z kapilary. Dla zainteresowanych w Dodatku przedstawiono wyprowadzenie tego prawa.

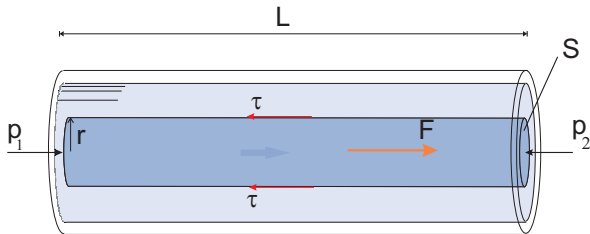
Z prawa Hagera-Poiseuille'a wynika, iż aby mógł nastąpić przepływ cieczy przez kapilarę potrzebna jest różnica ciśnień Δp na jej końcach. Dzięki różnicy ciśnień do cieczy zostają przyłożone siły zewnętrzne, które kompensują hamujące działanie sił lepkości pojawiających się

podczas przepływu. Dlatego, aby wycisnąć z tubki pastę do zębów albo ketchup, musimy tubkę ścisnąć, wywołując wewnątrz tubki większe ciśnienie niż ciśnienie atmosferyczne panujące z drugiej zewnętrznej strony otworu.

Zauważmy, iż natężenie wypływu Q silnie zależy od promienia kapilary R (jak R^4). Zmniejszenie promienia R dwa razy wymaga zwiększenia różnicy ciśnień Δp aż $2^4 = 16$ razy, aby natężenie wypływu Q pozostało niezmiennione. Zmieniając R o czynnik 0.9 (czyli zmniejszając o 10 %), wymagana różnica ciśnień musi wzrosnąć $1/0.9^4 = 1.52$ razy, czyli aż o 52 %. Przykład ten wyjaśnia związek między wysokocholesterową dietą, która prowadzi do zwężenia prześwitu naczyń krwionośnych, a wysokim ciśnieniem krwi. Z powodu zależności Q od R^4 już niewielkie zwężenie średnicy naczyń krwionośnych prowadzi do silnego wzrostu ciśnienia krwi i zwiększonego obciążenia mięśnia sercowego.

DODATEK: WYPROWADZENIE PRAWA HAGENA-POISEUILLE'A

Niech ciecz niutonska płynie w sposób laminarny przez kapilarę o promieniu wewnętrznym R i długości L . Prędkości warstwek cieczy mających formę koncentrycznych cienkościennych cylindrów są równoległe do osi kapilary - Rys. 2. Rozważmy ruch wszystkich cylindrów, których promienie mieszczą się w zakresie od 0 do r , gdzie $r < R$. Traktowane *jako całość* tworzą one walec o promieniu r i wysokości L - Rys 8. Na mocy III zasady dy-



Rysunek 8. Na walcowatą porcję cieczy płynącej w kapilarze działa siła związana z różnicą ciśnień p_1 i p_2 na końcach kapilary, czyli $F = \Delta p \cdot S$, gdzie $\Delta p = p_1 - p_2$, oraz siła lepkości równa $\tau \cdot 2\pi rL$, gdzie $2\pi rL$ jest powierzchnią boczną walca. Podczas przepływu stacjonarnego siły te się równoważą.

namiki Newtona, oddziaływania wzajemne (wewnętrzne) między warstewkami cieczy tworzącymi walec znoszą się i nie dają wkładu do ruchu całego walca. Jedyne siły *zewewnętrzne* wpływają na ruch walca. Pierwszą z nich jest siła związana z różnicą ciśnień $\Delta p = p_1 - p_2$ wywieranego na podstawy walca. Wynosi ona $F = \Delta p \cdot \pi r^2$. Po drugie, walec siłami lepkości oddziałuje z poruszającą się wolniej od niego warstwą cieczy stykającą się od zewnątrz z jego powierzchnią boczną. Siły lepkości są skierowane przeciwnie do prędkości walca i działają hamująco na jego ruch. Ponieważ powierzchnia boczna

walca to $2\pi rL$, zatem siła lepkości działająca na walec ma wartość $\tau \cdot 2\pi rL$, gdzie τ to naprężenie styczne w cieczy istniejące na powierzchni walca (por wzór (1)). Gdy przepływ jest stacjonarny, tzn. prędkość cieczy jest ustalona, wtedy działające na walec siły są w równowadze. Innymi słowy, siła związana z różnicą ciśnień na końcach walca jest zrównoważona przez siłę lepkości:

$$\Delta p \cdot \pi r^2 = \tau 2\pi rL. \quad (7)$$

Po uproszczeniu i przekształceniu otrzymujemy:

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2L}. \quad (8)$$

Z kolei, na mocy prawa Newtona (3), mamy:

$$\tau = \eta \left(-\frac{dv}{dr} \right), \quad (9)$$

gdzie $\frac{dv}{dr}$ to gradient prędkości na powierzchni walca. Znak minus pochodzi stąd, że ze wzrostem r prędkość v maleje ($dv < 0$), czyli gradient jest ujemny, a tymczasem τ w naszym rozważaniu jest wielkością dodatnią (wartością bezwzględną naprężenia stycznego). Wzory (8) i (9) możemy porównać ze sobą, co daje nam:

$$\eta \left(-\frac{dv}{dr} \right) = \frac{\Delta p r}{2L}. \quad (10)$$

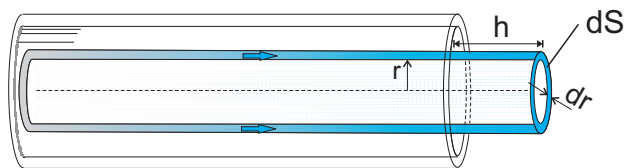
W granicy $dr \rightarrow 0$ stosunek $\frac{dv}{dr}$ oznacza pochodną funkcji $v(r)$, gdzie $v(r)$ jest prędkością cienkiej cylindrycznej warstewki tworzącej powierzchnię boczną walca o promieniu r . Wybrany przez nas myślowo walec jest jednak całkowicie dowolny. Zatem równanie (10) jest warunkiem na prędkość *dowolnej* cienkiej warstewki cieczy o promieniu r ($0 < r < R$). Dokładniej, przedstawia ono wzór na pochodną $\frac{dv}{dr}$, z którego, po scałkowaniu, otrzymujemy samą funkcję $v(r)$ określającą prędkość cienkiej warstwy cieczy w zależności od odległości od osi kapilary:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2), \quad (11)$$

gdzie stałą całkowania $\frac{\Delta p}{4\eta L} R^2$ wybraliśmy uwzględniając, iż przy ściankach kapilary (czyli dla $r = R$), prędkość cieczy jest zero.

Płynąc z prędkością v , pierścień cieczy o nieskończenie małej grubości dr przesuwa się w czasie dt o odległość $h = vdt$ (Rys. 9). Ponieważ pole przekroju poprzecznego pierścienia wynosi $dS = 2\pi r dr$, więc ruch takiej warstewki wiąże się z wypłynięciem w czasie dt objętości $dV = dS \cdot h = 2\pi r dr v dt$ z kapilary. Dla pojedynczej cylindrycznej warstewki mającej prędkość v objętościowe natężenie wypływu (por. wzór (5)) wynosi zatem:

$$dQ \equiv \frac{dV}{dt} = 2\pi r dr v. \quad (12)$$



Rysunek 9. W czasie dt z kapilary wypływa część pierścieniowej warstwy cieczy o objętości $dV = dS \cdot h$, gdzie dS to pole przekroju poprzecznego pierścienia, czyli $dS = 2\pi r dr$, a $h = v dt$ to droga pokonana przez warstwę w czasie dt .

Całkowite natężenie wypływu cieczy z kapilary otrzymamy przez zsumowanie natężeń wypływu od każdej warstewki. Wykonuje się to dokonując całkowania równania (12) po wszystkich warstewkach, czyli po r w zakresie od 0 do R :

$$Q = \int_0^R 2\pi r v dr, \quad (13)$$

co po podstawieniu pod całką funkcji $v(r)$ znalezionej uprzednio (równanie (11)) daje:

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta L}. \quad (14)$$

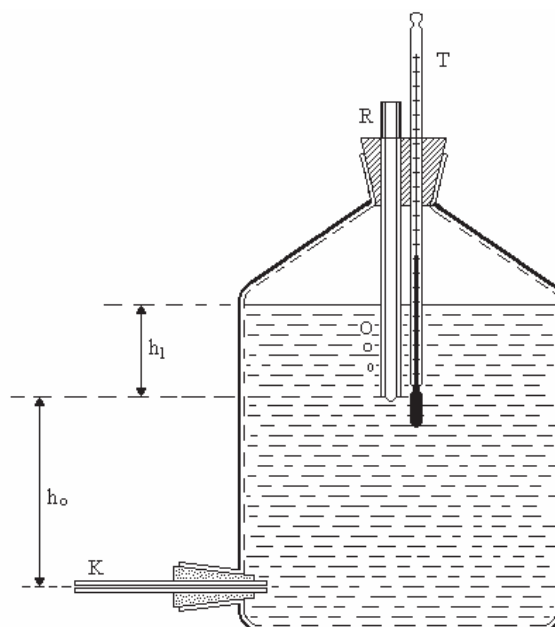
W ten sposób otrzymaliśmy prawo Hagena-Poiseuille'a określające od czego zależy objętościowe natężenie wypływu cieczy z kapilary.

A. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI DYNAMICZNEJ CIECZY NEWTONOWSKIEJ METODĄ POISEUILLE'A

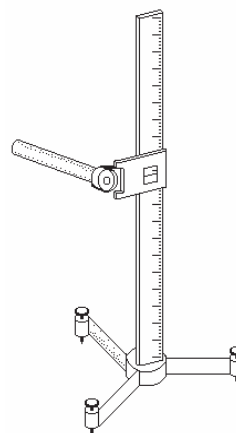
A. Zasada pomiaru

W ćwiczeniu do utrzymania *stałego* ciśnienia, pod którym następuje wypływ cieczy z kapilary K wykorzystuje się butlę Mariotte'a (Rys. 10). Butla Mariotte'a jest to butla szklana zamknięta szczelnie korkiem z pionową rurką szklaną R, wprowadzoną do cieczy na pewną głębokość. Nad dnem butli znajduje się wylot z umieszczoną w nim kapilarą K, przez którą ciecz (najczęściej woda) może wypływać. Kapilarę K i wylot rurki pionowej R obserwuje się przez katetometr (Rys. 11).

W miarę wypływu cieczy ciśnienie powietrza nad cieczą maleje i powietrze atmosferyczne pod wpływem różnicy ciśnień zaczyna dostawać się do wnętrza butli przez pionową rurkę R. Na poziomie wylotu rurki pionowej R pojawiają się pęcherzyki powietrza. Ukazanie się pierwszych pęcherzyków powietrza u wylotu rurki R oznacza, że na poziomie jej wylotu panuje ciśnienie równe ciśnieniu atmosferycznemu. Ciśnienie to utrzymuje się na tym poziomie dopóty, dopóki poziom cieczy w naczyniu znajduje się powyżej wylotu rurki R. Na koniec kapilary K



Rysunek 10. Butla Mariotte'a. $\Delta p = \rho g h_0$.



Rysunek 11. Katetometr.

będący wewnątrz butli na głębokości h_0 poniżej wylotu rurki R działa zatem ciśnienie atmosferyczne powiększone o ciśnienie hydrostatyczne słupa wody o wysokości h_0 i równe $\rho g h_0$, gdzie ρ to gęstość cieczy znajdującej się w butli (cieczy badanej), g - przyspieszenie ziemskie. Na koniec kapilary K znajdujący się w powietrzu działa jedynie ciśnienie atmosferyczne. Ciecz wypływa zatem z naczynia przez kapilarę K pod stałym ciśnieniem Δp równym różnicy ciśnień na końcach kapilary, czyli:

$$\Delta p = \rho g h_0. \quad (15)$$

Współczynnik lepkości dynamicznej wyznaczamy wykorzystując wzór (6), z którego po przekształceniu otrzy-

muje się

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho g h_0}{8QL}. \quad (16)$$

Jeżeli wartość Q wyrazi się przez objętość cieczy, która wypłynęła w czasie t

$$Q = \frac{V}{t}, \quad (17)$$

powyższy wzór przyjmuje postać:

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho g h_0 t}{8L V}. \quad (18)$$

Jeżeli nadto zauważymy, że objętość cieczy, która wypłynęła można wyrazić poprzez jej masę

$$V = \frac{m}{\rho}, \quad (19)$$

wzór (18) można zapisać jako:

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho^2 g h_0 t}{8L m}. \quad (20)$$

Wielkościami mierzonymi bezpośrednio są tu wysokość słupa cieczy (wody) h_0 , czas t oraz masa cieczy (wody) m .

A. Wykonanie ćwiczenia

1. Zważyć małą (najlepiej 100 mililitrową) zlewkę, zapisać jej masę m_1 . Odnotować, wynikającą ze specyfikacji wagi, niepewność maksymalną pomiaru masy równą $\Delta_d m_1 = 0.1$ g.

2. Odczytać temperaturę wody w butli T (w stopniach Celsjusza), zapisać. Podstawić pod wylot poziomej kapilary K jakiegokolwiek naczynko, by woda wypływająca z kapilary nie kapiała na stół. Zdjąć kołpak z kapilary (woda zacznie wypływać do naczynka) i odczekać aż z rurki pionowej R wewnątrz butli zacząć wydobywać się pęcherzyki powietrza.

3. Zamiast uprzednio użytego naczynka, podstawić teraz pod wylot kapilary K wcześniej zważoną zlewkę i pozwolić wypływać wodzie 5 - 8 minut. Zmierzyć stoperem czas wypływu wody t i wynik zapisać. Zanotować niepewność maksymalną stopera $\Delta_d t = 1$ s.

4. Zważyć zlewkę z wodą, która wypłynęła z kapilary, m_2 . Niepewność maksymalna tego pomiaru wynosi $\Delta_d m_2 = 0.1$ g. Masa wody jest równa $m = m_2 - m_1$, zapisać wartość m .

5. Przy pomocy katetometru zmierzyć wysokość słupa wody h_0 (katetometr jest to liniał ustawiony w pozycji pionowej, wzdłuż którego przesuwają się lunetka pozwalająca dokładnie zobaczyć położenie wylotu kapilary pionowej i kapilary poziomej - Rys. 11). Odnotować niepewność maksymalną wskazań liniału katetometru jako równą najmniejszej działce przyrządu, czyli $\Delta_d h = 0.1$ cm.

A. Opracowanie wyników, dyskusja błędów

1. Korzystając z danych:

$$R = (4,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ m},$$

$$L = (2,08 \pm 0,01) \cdot 10^{-1} \text{ m},$$

$$g = (9,81 \pm 0,01) \text{ m/s}^2,$$

$$\rho = (9,97 \pm 0,01) \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$$

oraz wyników własnych pomiarów m , t , h_0 obliczyć z wzoru (20) współczynnik lepkości dynamicznej wody η , wyrażając go w układzie jednostek SI (w Pa s).

2. Obliczyć niepewność standardową $u(\eta)$. W tym celu odnotuj najpierw, że:

a) Niepewność standardowa pomiaru masy m_1 i m_2 wynosi odpowiednio $u(m_1) = \Delta_d m_1 / \sqrt{3}$ oraz $u(m_2) = \Delta_d m_2 / \sqrt{3}$. Niepewność standardowa pomiaru masy $m = m_2 - m_1$ jest dana jako

$$u(m) = \sqrt{u^2(m_1) + u^2(m_2)} = \quad (21)$$

$$= \sqrt{\frac{(\Delta_d m_1)^2}{3} + \frac{(\Delta_d m_2)^2}{3}} = 0.082 \text{ g}.$$

b) Niepewność standardowa pomiaru czasu jest równa

$$u(t) = \frac{\Delta_d t}{\sqrt{3}} = 0.58 \text{ s}. \quad (22)$$

c) Ponieważ wysokość h_0 jest odczytana jako różnica wskazań położenia wylotu kapilary pionowej i położenia kapilary poziomej, a każde wskazanie jest obarczone niepewnością maksymalną $\Delta_d h$ (czyli niepewnością standardową $\Delta_d h / \sqrt{3}$), zatem niepewność standardowa pomiaru wysokości h_0 to

$$u(h_0) = \sqrt{\frac{(\Delta_d h)^2}{3} + \frac{(\Delta_d h)^2}{3}} = 0.082 \text{ cm}. \quad (23)$$

d) Niepewność standardowa pomiaru promienia kapilary R wynosi

$$u(R) = \frac{\Delta_d R}{\sqrt{3}} = \frac{0.1 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{\sqrt{3}} = 0.058 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad (24)$$

gdzie wykorzystano podaną w p. 1 niepewność maksymalną wyznaczenia promienia kapilary równą $\Delta_d R = 0.1 \cdot 10^{-4}$ m.

Uwaga: Niepewności wyznaczenia L , g oraz ρ , które podano w p. 1 powyżej, dają znikomo mały wkład do niepewności $u(\eta)$ i można je pominąć.

e) Na podstawie wzoru (20) oraz wykorzystując wartości niepewności standardowych $u(m)$, $u(t)$, $u(h_0)$ i $u(R)$, oblicz niepewność standardową $u(\eta)$.

Wskazówka: Zastosuj wzór (12) z materiałów [8]. Zauważ, że przy obliczeniu niepewności $u(\eta)$ wzór (20) można traktować jako wyrażenie postaci

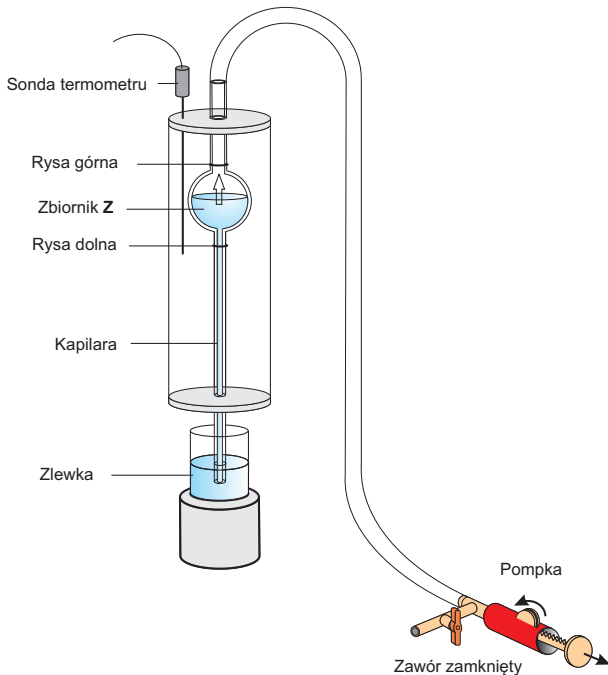
$$\eta = \underbrace{\frac{\pi \rho^2 g}{8L}}_{\text{const}} \cdot R^4 m^{-1} h_0^1 t^1.$$

3. Obliczyć niepewność rozszerzoną $U(\eta)$ pomiaru η stosując mnożnik $k = 2$. Znaną wartość współczynnika lepkości wody $\eta \pm U(\eta)$ porównać z wartością tablicową dla temperatury T (patrz Rys. 13 lub Tabela I).

B. WYZNACZANIE WSPÓLCZYNNIKA LEPKOŚCI DYNAMICZNEJ CIECZY NEWTONOWSKIEJ METODĄ WZGLĘDNĄ ARRHENIUSA

B. Zasada pomiaru

Badamy przepływ dwóch cieczy newtonowskich wypływających przez kapilarę ze zbiornika **Z** (Rys. 12) o objętości V . Objętość tę wyznaczają dwie rysy poziome



Rysunek 12. Wiskozymetr kapilarny. Rysunek przedstawia proces zasysania cieczy do zbiornika **Z**. Po zassaniu cieczy i otwarciu zaworu przy pompce, ciecz poprzez kapilarę wypływa ze zbiornika **Z** do zlewki.

zaznaczone na rurkach szklanych zbiornika **Z**. Zbiornik **Z** może być termostatowany wodą, której temperaturę odczytuje się za pomocą termometru.

Współczynnik lepkości dynamicznej badanej cieczy η_c (w naszym przypadku jest to 96% wodny roztwór alkoholu etylowego) jest tu wyznaczany w oparciu o znajomość współczynnika lepkości dynamicznej η_w wody destylowanej, która jest cieczą wzorcową.

Korzystając z wzoru Poiseuille'a (wzór 6) zastosowanego dwukrotnie: do cieczy badanej i do cieczy wzorcowej (wody) otrzymujemy na tę samą objętość wypływającej cieczy V wyrażenie:

$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p'}{8 \eta_c L} t_c, \quad (25)$$

$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta_w L} t_w, \quad (26)$$

gdzie t_c - czas wypływu cieczy badanej o objętości V , t_w - czas wypływu wody o objętości V . We wzorach tych ciśnienia hydrostatyczne, które wymuszają przepływ cieczy $\Delta p'$ i Δp nie są równe ze względu na różnicę gęstości cieczy badanej ρ_c i cieczy wzorcowej ρ_w . Mamy więc przy tej samej wysokości h słupów obydwóch cieczy ciśnienia:

$$\Delta p' = \rho_c g h, \quad (27)$$

$$\Delta p = \rho_w g h. \quad (28)$$

Stąd na mocy równań (25) i (26):

$$V = \frac{\pi R^4 \rho_c g h}{8 \eta_c L} t_c \quad (29)$$

oraz

$$V = \frac{\pi R^4 \rho_w g h}{8 \eta_w L} t_w. \quad (30)$$

Porównując prawe strony ostatnich dwóch równości otrzymujemy po uproszczeniach:

$$\frac{\rho_c t_c}{\eta_c} = \frac{\rho_w t_w}{\eta_w} \quad (31)$$

albo

$$\eta_c = \frac{\rho_c}{\rho_w} \frac{t_c}{t_w} \eta_w. \quad (32)$$

Do wyznaczenia lepkości cieczy η_c wystarczy wyznaczyć doświadczalnie czasy wypływu objętości V cieczy badanej (t_c) i wody (t_w) przy tej samej temperaturze wypływu. Gęstości cieczy ρ_c , gęstość wody ρ_w oraz współczynnik lepkości wody η_w odczytuje się z tablic dla tej samej temperatury.

B. Wykonanie ćwiczenia

1. Do małej zlewki nalać dokładnie odmierzonych 15 ml wody destylowanej.

2. Ustawić zlewkę z wodą na metalowej podstawie pod wylotem kapilary wiskozymetru (Rys. 12).

3. Zamknąć zawór umieszczony przy wylocie z pompki. Pokręć pompkę zassać wodę do wnętrza wiskozymetru na wysokość 1-2 cm powyżej górnej kreski pomiarowej (uwaga: nie dopuścić do tego, by woda dostała się do gumowej rurki doczepionej u góry wiskozymetru).

4. Włączyć termometr i zapisać temperaturę $T[^\circ\text{C}]$.

5. Włączyć stoper elektroniczny wyłącznikiem na górnej pokrywie obudowy. **Uwaga:** Jeżeli po włączeniu nie zaświecą się dwie czerwone diody sygnalizacyjne umieszczone z lewej strony wyświetlacza, pomiar czasu wypływu należy przeprowadzić przy pomocy stopera ręcznego.

6. Otworzyć zawór, obracając go o 90 stopni. Stoper włączy się, gdy poziom wody minie górny poziom pomiarowy (rysa górna), a zatrzyma po minięciu dolnego poziomu (rysa dolna). Zanotować końcowe wskazanie stopera - czas wypływu wody t_w .

7. Powtórzyć czynności 3-6 5-krotnie.

8. Wyłączyć stoper elektroniczny, wyjąć zlewkę spod kapilary. Przy pomocy pompki do pipety opróżnić dokładnie kapilarę z wody.

9. Czynności od 1 - 7 powtórzyć dla badanej cieczy (alkohol etylowy). Zapisać czas wypływu cieczy t_c .

B. Opracowanie wyników, dyskusja błędów

1. Obliczyć średni czas wypływu wody t_w i cieczy t_c .

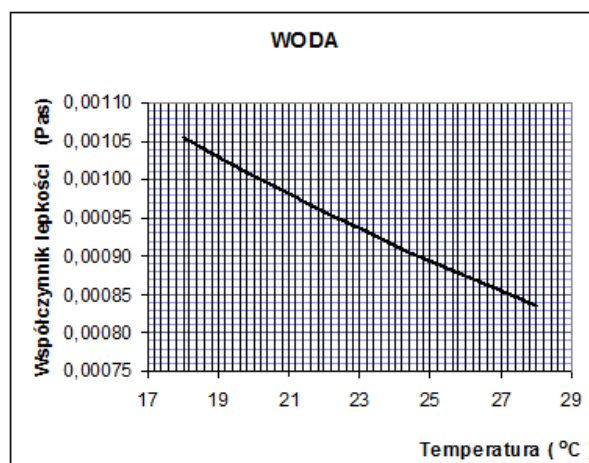
2. Wyznaczyć graficznie posługując się Rys. 13 lub metodą interpolacji (analitycznie) na podstawie Tabeli I współczynnik lepkości wody destylowanej η_w dla temperatury pomiaru T .

3. Obliczyć wartość współczynnika lepkości dynamicznej cieczy η_c według wzoru (32) przyjmując:

$$\rho_w = (9,97 \pm 0,01) \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_c = \rho_{\text{alkohol}} = (8,07 \pm 0,05) \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$$

oraz dla η_w wartość tablicową znalezionej w punkcie 2.



Rysunek 13. Zależność współczynnika lepkości dynamicznej η_w od temperatury dla wody destylowanej.

4. Wyznaczyć niepewność standardową pomiaru czasu wypływu wody $u(t_w)$, obliczając średni błąd kwadratowy z serii pomiarów czasu t_w (patrz wzór (3) w materiałach [8]):

$$u(t_w) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (t_{wi} - \bar{t}_w)^2}{5(5-1)}}.$$

5. Analogicznie jak w p. 4 obliczyć niepewność standardową pomiaru czasu wypływu alkoholu $u(t_c)$.

6. Na podstawie wzoru (32) obliczyć niepewność standardową $u(\eta_c)$.

Wskazówka: Zastosuj wyrażenie (12) z materiałów [8]. Niepewności wielkości tablicowych takich jak ρ_w , ρ_c oraz η_w można zaniedbać i wzór (32) potraktować jako mający postać:

$$\eta_c = \text{const} \cdot t_c^1 t_w^{-1}.$$

7. Obliczyć niepewność rozszerzoną $U(\eta_c)$ pomiaru η_c stosując mnożnik $k = 2$. Znalezionej wartości współczynnika lepkości wody $\eta_c \pm U(\eta_c)$ porównać z wartością tablicową dla temperatury T (patrz Tabela II).

Tabela I. Współczynnik lepkości dynamicznej wody η_w w funkcji temperatury podany w Pa·s. Uwaga: 1 Pa·s = 10 P (10 puazów) = 10^3 cP (10^3 centypuazów).

T (°C)	10	15	20	25	30
η_w (Pa·s)	0,00131	0,001142	0,001060	0,000893	0,000800

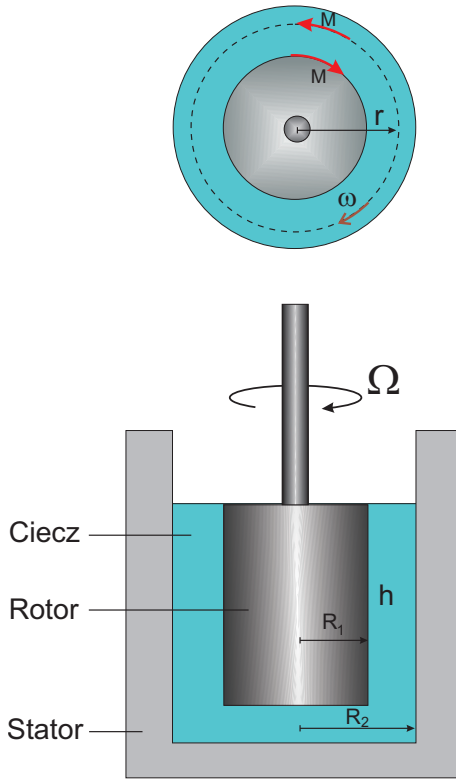
Tabela II. Współczynnik lepkości dynamicznej alkoholu w funkcji temperatury.

T (°C)	20	25	30
η_{alkohol} (Pa·s)	0,00140	0,00126	0,00114

C. POMIAR WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI ZA POMOCĄ WISKOZYMETRU ROTACYJNEGO

C. Zasada pomiaru

Rysunek 14 przedstawia zasadnicze elementy wiskozymetru rotacyjnego. Wirujący z prędkością kątową Ω cy-



Rysunek 14. Wiskozymetr rotacyjny.

lindryczny rotor o promieniu R_1 i wysokości h wprawia w laminarny ruch obrotowy ciecz umieszczoną w cylindrycznym naczyniu zwanym statorem. Wewnętrzny promień statora wynosi R_2 . W zależności od odległości r od osi obrotu wirujące cylindryczne warstwy cieczy mają różne prędkości kątowe ω . Przy rotorze ich prędkość wynosi Ω , zaś przy ścianie statora $\omega = 0$. Obracający się rotor wywiera na ciecz moment siły M , który wobec obecności sił lepkości zapewnia utrzymanie stałej prędkości cieczy. Wartość momentu siły M oraz prędkość kątową rotora Ω można odczytać bezpośrednio ze wskazań wiskozymetru.

Rozważmy porcję cieczy wewnątrz promienia r . Ponieważ ciecz porusza się ruchem jednostajnym, działają

nań moment siły M pochodzący od rotora równoważony jest przez moment sił lepkości działających w odległości r od osi obrotu. Moment sił lepkości jest zatem taki sam niezależnie od r i wynosi M . Z definicji momentu siły:

$$M = rF, \quad (33)$$

gdzie F jest siłą działającą na powierzchnię boczną A wirującej porcji cieczy będącej wewnątrz promienia r . $A = 2\pi rh$ (powierzchnia boczna walca). Z definicji naprężenia stycznego (1) mamy $F = \tau A$, zatem

$$M = r \cdot \tau \cdot A = r \cdot \tau \cdot 2\pi rh. \quad (34)$$

Z kolei prawo Newtona (3) wiąże ze sobą τ i gradient prędkości w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu cieczy. Ponieważ $v = r\omega$, gdzie ω to prędkość kątowa, gradient prędkości $\frac{dv}{dr} = r \frac{d\omega}{dr} + \omega$. W przypadku przepływu w wiskozymetrze rotacyjnym za naprężenie styczne τ sił lepkości odpowiedzialny jest jednak jedynie człon $r \frac{d\omega}{dr}$. Czynnikiem ω odpowiada za wzrost prędkości wraz ze wzrostem r dla wirującej bryły sztywnej, wewnątrz której nie ma sił lepkości; $r \frac{d\omega}{dr}$ to człon związany ze zmieniającą się prędkością kątową, czyli względnym przesuwaniem się i wzajemnym tarciami wirujących warstw cieczy. Prawo Newtona (3) przyjmuje zatem postać

$$\tau = -\eta r \frac{d\omega}{dr}, \quad (35)$$

gdzie znak minus wynika stąd, że ω maleje ze wzrostem r . Z równania (34) otrzymujemy:

$$M = -r \cdot \eta r \frac{d\omega}{dr} \cdot 2\pi rh, \quad (36)$$

czyli

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{M}{2\pi\eta hr^3}. \quad (37)$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe równanie spełnia funkcja:

$$\omega(r) = \frac{M}{4\pi\eta hr^2} + C. \quad (38)$$

Z warunków brzegowych $\omega(R_1) = \Omega$, gdzie Ω jest prędkością wirowania rotora i zarazem warstwy cieczy bezpośrednio doń przylegającej oraz $\omega(R_2) = 0$ (ciecz w bezpośrednim sąsiedztwie ścianki statora jest w spoczynku) otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{M}{4\pi\eta h R_1^2} + C, \\ 0 &= \frac{M}{4\pi\eta h R_2^2} + C, \end{aligned} \quad (39)$$

które, po wyeliminowaniu stałej C , prowadzą do wzoru

$$\eta = \frac{M}{4\pi\Omega h} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right). \quad (40)$$

Mierząc moment siły M przyłożony do rotora oraz jego prędkość kątową Ω , przy znajomości parametrów R_1 , R_2 oraz h , można na podstawie wzoru (40) wyznaczyć współczynnik lepkości cieczy.

C. Wykonanie pomiaru

1. Włączyć termostat KRUSS. Uruchomić pompkę termostatu, zaznaczając rysikiem ikonę *. Ustawić zadaną wartość temperatury stabilizacji $T_{\text{set}} = 25^{\circ}\text{C}$, posługując się ikonami $T+$ i $T-$.

2. Jeśli przyrząd jest przygotowany do przeprowadzenia pomiaru, w satorze wiskozymetru znajduje się badana ciecz (gliceryna) z zanurzonym w niej rotorem. W przeciwnym przypadku należy odważyć w oddzielnej zlewce 35 g gliceryny i przelać ją do satora. Następnie, **pod nadzorem prowadzącego ćwiczenia** zamontować rotor na osi wiskozymetru. Ostrożnie unosząc sator, przymocować go do uchwytu statywu wiskozymetru. Rotor powinien znaleźć się wewnątrz satora, zanurzony aż po górną krawędź w badanej cieczy.

3. Uruchomić wiskozymetr. Na ekranie dotykowym rysikiem zaznaczyć napis *Measure* i następnie *Speed*. Wybrać prędkość obrotową $N = 5$ rpm i zatwierdzić OK. Nacisnąć rysikiem ikonę *Start*.

4. Po ustaleniu się wskazań wiskozymetru odczytać wartość momentu siły M (*torque*) i zatrzymać pomiar, zaznaczając STOP.

5. Wyłączyć wiskozymetr.

C. Opracowanie pomiarów

1. Wyraż prędkość kątową Ω poprzez prędkość obrotową N . Uwaga: rpm oznacza ilość obrotów na minutę, zatem 1 rpm odpowiada prędkości kątowej równej $2\pi/60$ 1/s.

2. Korzystając z wzoru (40), oblicz współczynnik lepkości η dla gliceryny. Zmierzony moment siły M należy wyrazić w jednostkach Nm. Odpowiednie parametry

przyrządu mają wartość: $R_1 = 0,015$ m, $R_2 = 0,02$ m, $h = 0,04$ m.

3. Porównaj wynik pomiaru z wartością tablicową (Tabela III).

Tabela III. Zależność współczynnika lepkości dynamicznej gliceryny od stężenia roztworu (dla 25°C).

Stężenie (%)	97	98	99	100
$\eta_{\text{gliceryna}}$ (Pa·s)	0,523	0,629	0,775	0,945

Uwaga: Dokładniejsza metoda wyznaczania współczynnika lepkości za pomocą wiskozymetru rotacyjnego opiera się na wyznaczeniu krzywej płynięcia $\tau(\dot{\gamma})$, gdzie $\dot{\gamma} = -r \frac{d\omega}{dr}$. Szczegóły tej metody zawarte są w odrębnej instrukcji dołączonej do zestawu doświadczalnego.

PODZIĘKOWANIE

Składam wielkie podziękowania panu dr. Piotrowi Janasowi za nieocenioną pomoc i ogrom pracy włożonej w przygotowanie zestawu doświadczalnego i zaadoptowanie go do warunków pracowni studenckiej.

-
- [1] Cwietkow W.M., Eskin W.Je., Frenkel S.Ja., Struktura makrocząsteczek w roztworach, WN-T, Warszawa, 1968
 - [2] Flory P.J., Principles of Polymer Chemistry, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1953
 - [3] Jeżewski M., Fizyka, PWN, Warszawa, 1972
 - [4] Kembłowski Z., Reometria płynów nienewtonowskich, WN-T, Warszawa, 1973
 - [5] Reiner M., Reologia teoretyczna, PWN, Warszawa, 1958
 - [6] Wilkinson W.L., Ciecze nienewtonowskie, WN-T, Warszawa, 1963
 - [7] Wanik B.M., Wykłady z Fizyki, t. 1, Wyd. AR Kraków, 1998
 - [8] K. Rębilas, Wprowadzenie do metod opracowania wyników pomiarowych.